

Règles de la Dédution Naturelle

Axiome

- $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h : A$
 montrons A
 $\langle i \rangle$ CQFD (Ax avec h)

Axiome

- $\langle j \rangle$ supposons $h'_1 : A'_1, \dots, h'_k : A'_k, h : A$
 montrons B
 ...
 $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
 montrons A
 $\langle i \rangle$ CQFD (Ax avec h)
 ...
 $\langle j \rangle$ CQFD (Nom)

Introduction du connecteur \Rightarrow

- $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
 montrons $A \Rightarrow B$
 $\langle i + 1 \rangle$ supposons $h : A$
 montrons B
 ...
 $\langle i + 1 \rangle$ CQFD
 $\langle i \rangle$ CQFD (I_{\Rightarrow})

Introduction du connecteur \wedge

- $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
 montrons $A \wedge B$
 $\langle i + 1 \rangle$ montrons A
 ...
 $\langle i + 1 \rangle$ CQFD
 $\langle i + 2 \rangle$ montrons B
 ...
 $\langle i + 2 \rangle$ CQFD
 $\langle i \rangle$ CQFD (I_{\wedge})

Affaiblissement

- $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h : B$
 montrons A
 $\langle i + 1 \rangle$ montrons A sans utiliser h
 ...
 $\langle i + 1 \rangle$ CQFD
 $\langle i \rangle$ CQFD (Af)

Introduction de true

- $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
 montrons true
 $\langle i \rangle$ CQFD (I_{\top})

Elimination de false

- $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h : \text{false}$
 montrons B
 $\langle i \rangle$ CQFD (E_{\perp} avec h)

Elimination du connecteur \Rightarrow

- $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
 montrons B
 $\langle i + 1 \rangle$ montrons $A \Rightarrow B$
 ...
 $\langle i + 1 \rangle$ CQFD
 $\langle i + 2 \rangle$ montrons A
 ...
 $\langle i + 2 \rangle$ CQFD
 $\langle i \rangle$ CQFD (E_{\Rightarrow})

Elimination gauche du connecteur \wedge

- $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
 montrons A
 $\langle i + 1 \rangle$ montrons $A \wedge B$
 ...
 $\langle i + 1 \rangle$ CQFD
 $\langle i \rangle$ CQFD (E_{\wedge}^g)

Elimination droite du connecteur \wedge

- $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
 montrons B
 $\langle i + 1 \rangle$ montrons $A \wedge B$
 ...
 $\langle i + 1 \rangle$ CQFD
 $\langle i \rangle$ CQFD (E_{\wedge}^d)

Introduction gauche du connecteur \vee

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons $A \vee B$
$\langle i+1 \rangle$	montrons A
\dots	
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (I_{\vee}^g)

Introduction droite du connecteur \vee

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons $A \vee B$
$\langle i+1 \rangle$	montrons B
\dots	
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (I_{\vee}^d)

Elimination du connecteur \vee

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons C
$\langle i+1 \rangle$	montrons $A \vee B$
\dots	
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i+2 \rangle$	supposons $h_A : A$ montrons C
\dots	
$\langle i+2 \rangle$	CQFD
$\langle i+3 \rangle$	supposons $h_B : B$ montrons C
\dots	
$\langle i+3 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (E_{\vee})

Introduction du connecteur \neg

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons $\neg A$
$\langle i+1 \rangle$	supposons $h : A$ montrons false
\dots	
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (I_{\neg})

Elimination du connecteur \neg

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons false
$\langle i+1 \rangle$	montrons $\neg A$
\dots	
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i+2 \rangle$	montrons A
\dots	
$\langle i+2 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (E_{\neg})

Introduction du quantificateur \forall

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons $\forall x A$
$\langle i+1 \rangle$	soit une nouvelle variable y ($y \notin \text{Free}(A) \cup \bigcup_{i=1}^n \text{Free}(A_i)$) montrons $A[x := y]$
\dots	
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (I_{\forall})

Elimination du quantificateur \forall

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons $A[x := t]$
$\langle i+1 \rangle$	montrons $\forall x A$
\dots	
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (E_{\forall})

Introduction du quantificateur \exists

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons $\exists x A$
$\langle i+1 \rangle$	montrons $A[x := t]$
\dots	
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (I_{\exists})

Elimination du quantificateur \exists

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons B
$\langle i+1 \rangle$	montrons $\exists x A$
\dots	
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i+2 \rangle$	soit une nouvelle variable y ($y \notin \text{Free}(A) \cup \text{Free}(B) \cup \bigcup_{i=1}^n \text{Free}(A_i)$) supposons $h : A[x := y]$ montrons B
\dots	
$\langle i+2 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (E_{\exists})

Raisonnement par l'absurde

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons A
$\langle i+1 \rangle$	supposons $h : \neg A$ montrons false
\dots	
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (Abs)

RÈGLES SUPPLÉMENTAIRES POUR LE CONNECTEUR \Leftrightarrow **Introduction du connecteur \Leftrightarrow**

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons $A \Leftrightarrow B$
$\langle i+1 \rangle$	montrons $A \Rightarrow B$
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i+2 \rangle$	montrons $B \Rightarrow A$
$\langle i+2 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (I_{\Leftrightarrow})

Elimination gauche du connecteur \Leftrightarrow

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons $A \Rightarrow B$
$\langle i+1 \rangle$	montrons $A \Leftrightarrow B$
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (E_{\Leftrightarrow}^g)

Elimination droite du connecteur \Leftrightarrow

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons $B \Rightarrow A$
$\langle i+1 \rangle$	montrons $A \Leftrightarrow B$
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (E_{\Leftrightarrow}^d)

RÈGLES DÉRIVÉES

Elimination gauche directe du connecteur \wedge

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h : A \wedge B$ montrons A
$\langle i \rangle$	CQFD (D_{\wedge}^g avec h)

Elimination droite directe du connecteur \wedge

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h : A \wedge B$ montrons B
$\langle i \rangle$	CQFD (D_{\wedge}^d avec h)

Introductions du connecteur \Rightarrow

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : F_1, \dots, h_m : F_m$ montrons $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (\dots (A_n \Rightarrow A_{n+1}) \dots))$
$\langle i+1 \rangle$	supposons $h'_1 : A_1, \dots, h'_n : A_n$ montrons A_{n+1}
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (I_{\Rightarrow}^n)

Elimination directe du connecteur \Rightarrow

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n,$ $h'_1 : A \Rightarrow B, h'_2 : A$ montrons B
$\langle i \rangle$	CQFD (D_{\Rightarrow} avec h'_1, h'_2)

Hypothèses contradictoires

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h'_1 : A, h'_2 : \neg A$ montrons B
$\langle i \rangle$	CQFD (D_{\perp}^1 avec h'_1, h'_2)

Hypothèses contradictoires

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons B
$\langle i+1 \rangle$	montrons A
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i+2 \rangle$	montrons $\neg A$
$\langle i+2 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (D_{\perp}^2)

Elimination directe du connecteur \neg

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h'_1 : A, h'_2 : \neg A$
montrons false
 $\langle i \rangle$ CQFD (D_{\neg} avec h'_1, h'_2)

Elimination directe du connecteur \vee

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h : A \vee B$
montrons C

$\langle i+1 \rangle$ supposons $h_A : A$
montrons C
 \dots
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i+2 \rangle$ supposons $h_B : B$
montrons C
 \dots
 $\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (D_{\vee} avec h)

Elimination directe du quantificateur \forall

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h : \forall x A$
montrons $A[x := t]$
 $\langle i \rangle$ CQFD (D_{\forall} avec h)

Elimination directe du quantificateur \exists

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h : \exists x A$
montrons B

$\langle i+1 \rangle$ soit une nouvelle variable y
($y \notin \text{Free}(A) \cup \text{Free}(B) \cup \bigcup_{i=1}^n \text{Free}(A_i)$)
supposons $h' : A[x := y]$
montrons B
 \dots
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (D_{\exists} avec h)

Double négation

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg \neg A$
 \dots
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (R_{\neg}^1)

Double négation

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $\neg \neg A$

$\langle i+1 \rangle$ montrons A
 \dots
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (R_{\neg}^2)

Tiers exclu

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $A \vee \neg A$
 $\langle i \rangle$ CQFD (TE)

Elimination du tiers exclu

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons B

$\langle i+1 \rangle$ supposons $h'_1 : A$, montrons B
 \dots
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i+2 \rangle$ supposons $h'_2 : \neg A$
montrons B
 \dots
 $\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (D_{TE})