



TD2 : Règles de déduction sur les connecteurs

Les exercices annotés par le symbole \star correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur la page web de l'UE.

Exercice 2.1 (Règles de la Déduction Naturelle)

On considère la preuve de la figure 1. Quelles sont les règles de la déduction naturelle utilisées dans cette preuve? Remplacer les « ? » par les noms de règle. Pouvez-vous trouver une preuve « plus simple » de la formule $(A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$?

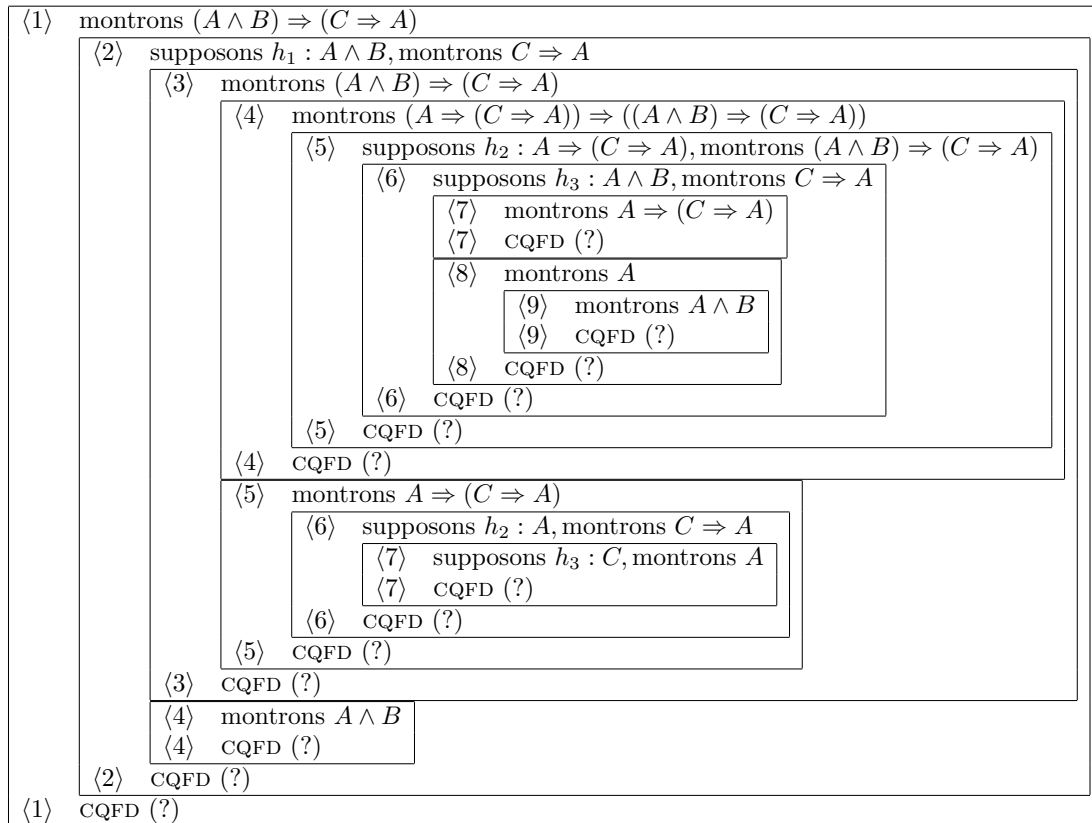


FIGURE 1 – Preuve de l'exercice 2.1

Exercice 2.2 (Connecteurs logiques)

Avec le système de la déduction naturelle, prouver les formules ci-dessous.

1. Implication et conjonction

- (F_{1.1}) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B))$
- (F_{1.2}) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
- (F_{1.3}) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C)))$
- (\star) (F_{1.4}) $((A \wedge B) \Rightarrow C) \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
- (F_{1.5}) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$
- (F_{1.6}) $((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$

2. Implication, conjonction et disjonction

- $$\begin{aligned}
(F_{2.1}) \quad & A \Rightarrow (A \wedge (A \vee B)) \\
(\star) \quad (F_{2.2}) \quad & (A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
(F_{2.3}) \quad & ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \Rightarrow (A \wedge (B \vee C)) \\
(F_{2.4}) \quad & ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C) \\
(F_{2.5}) \quad & (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \vee C) \Rightarrow (B \vee C)) \\
(F_{2.6}) \quad & (A \vee (B \vee C)) \Rightarrow ((A \vee B) \vee C) \\
(F_{2.7}) \quad & ((A \wedge B) \vee (A \vee B)) \Rightarrow (A \vee B) \\
(\star) \quad (F_{2.8}) \quad & ((A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \\
(\star) \quad (F_{2.9}) \quad & (A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B) \\
(\star) \quad (F_{2.10}) \quad & (A \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (A \vee C))
\end{aligned}$$

3. Implication, conjonction, disjonction et négation

- $$\begin{aligned}
(\star) \quad (F_{3.1}) \quad & (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \\
(F_{3.2}) \quad & (A \wedge \neg(A \wedge B)) \Rightarrow \neg B \\
(F_{3.3}) \quad & (A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B) \\
(\star) \quad (F_{3.4}) \quad & (\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \\
(\star) \quad (F_{3.5}) \quad & ((A \vee \neg B) \wedge B) \Rightarrow A \\
(\star) \quad (F_{3.6}) \quad & ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \\
(\star) \quad (F_{3.7}) \quad & (\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \\
(\star) \quad (F_{3.8}) \quad & (A \wedge B) \Rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \\
(\star) \quad (F_{3.9}) \quad & A \Rightarrow ((\neg A \vee B) \Rightarrow B) \\
(\star) \quad (F_{3.10}) \quad & (B \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)) \\
(\star) \quad (F_{3.11}) \quad & ((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B) \\
(\star) \quad (F_{3.12}) \quad & (A \vee \neg(B \vee C)) \Rightarrow (\neg C \vee A) \\
(\star) \quad (F_{3.13}) \quad & ((A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)) \Rightarrow (A \vee B) \\
(\star) \quad (F_{3.14}) \quad & (A \vee (B \wedge C)) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \vee (A \Rightarrow C))
\end{aligned}$$

4. Raisonnement par l'absurde, tiers exclu

- $$\begin{aligned}
(F_{4.1}) \quad & (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \\
(F_{4.2}) \quad & A \vee (A \Rightarrow B) \\
(\star) \quad (F_{4.3}) \quad & (A \Rightarrow \neg A) \vee (\neg A \Rightarrow A) \\
(\star) \quad (F_{4.4}) \quad & (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow \neg B) \\
(F_{4.5}) \quad & \neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B) \\
(F_{4.6}) \quad & A \Rightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)) \\
(F_{4.7}) \quad & ((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)) \Rightarrow B \\
(F_{4.8}) \quad & ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (A \vee B) \\
(\star) \quad (F_{4.9}) \quad & ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (B \Rightarrow A) \\
(\star) \quad (F_{4.10}) \quad & (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \\
(\star) \quad (F_{4.11}) \quad & (\neg A \Rightarrow (A \wedge \neg A)) \Rightarrow A \\
(\star) \quad (F_{4.12}) \quad & ((A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)) \Rightarrow (A \vee (B \Rightarrow C)) \\
(\star) \quad (F_{4.13}) \quad & \neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)
\end{aligned}$$

Exercice 2.3 Anissa, Boris et Julie ont un examen de logique à passer. On suppose que : (A) l'un des trois au moins révisera pour l'examen ; (B) si Anissa ne révisé pas, alors Boris non plus ; (C) si Anissa révisé, alors Julie aussi. En utilisant le système de la déduction naturelle, prouver que Julie révisera son examen (on pourra utiliser la formule $(F_{4.1})$ de l'exercice 2.2 sans la redémontrer).

Exercice 2.4 Anna et Mathias sont accusés d'un crime et déclarent :

Anna : « *Mathias est coupable.* »

Mathias : « *Nous sommes tous les deux innocents.* »

1. On suppose que tous les deux ont menti. Peut-on déterminer qui est coupable, qui ne l'est pas ?
2. On suppose maintenant que les coupables mentent et que les innocents disent la vérité. Peut-on déterminer qui est coupable, qui ne l'est pas ?

Formaliser vos raisonnements en utilisant le système de la déduction naturelle (on pourra utiliser la formule ($F_{3.1}$) de l'exercice 2.2 sans la redémontrer).

Exercice 2.5 Anna et Julie sont interrogées au sujet d'un crime et déclarent :

Anna : « *Julie est coupable.* »

Julie : « *Si je suis coupable, alors Anna l'est aussi.* »

1. Montrer que l'une au moins des deux déclarations est vraie.
2. On suppose maintenant que les innocents disent la vérité et que les coupables mentent. Montrer qu'exactlyement l'une des deux est coupable.

Formaliser vos raisonnements en utilisant le système de la déduction naturelle.