



## TD3 : Interprétation des fonctions, des prédicats et des connecteurs

Les exercices annotés par le symbole  $\star$  correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur la page web de l'UE.

### Exercice 3.1 (( $\star$ ) Interprétation des termes)

1. Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  un ensemble de symboles de fonctions avec  $\mathcal{F}_0 = \{k_1, k_2\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \{f\}$  et  $\mathcal{F}_2 = \{g\}$ .

- (a) Particulariser la définition de l'ensemble de termes  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$  pour l'ensemble  $\mathcal{F} = \{k_1, k_2, f, g\}$ .

On définit une structure  $\mathbf{M}$  dont le domaine est l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels comme suit :

$$\begin{aligned} k_1^{\mathbf{M}} &= 3 & f^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & g^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ k_2^{\mathbf{M}} &= 1 & f^{\mathbf{M}}(n) &= n & g^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) &= n_1 \times n_2 \end{aligned}$$

- (b) Calculer  $[g(f(k_1), g(k_2, k_1))]^{\mathbf{M}}$ .

- (c) Montrer par induction que pour tout terme  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ , il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $[t]^{\mathbf{M}} = 3^n$ .

2. Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$  un ensemble de symboles de fonction avec  $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$  et  $\mathcal{F}_2 = \{r, s\}$ .

- (a) Particulariser la définition de l'ensemble de termes  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$  pour l'ensemble  $\mathcal{F} = \{a, b, r, s\}$ .

On définit une structure  $\mathbf{M}$  dont le domaine d'interprétation est l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs comme suit :

$$\begin{aligned} a^{\mathbf{M}} &= 2 & r^{\mathbf{M}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} & s^{\mathbf{M}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ b^{\mathbf{M}} &= 0 & r^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) &= n_1 + n_2 & s^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) &= n_1 - n_2 \end{aligned}$$

- (b) Calculer  $[s(s(b, a), r(a, b))]^{\mathbf{M}}$ .

- (c) Montrer par induction que pour tout terme  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ , il existe un entier  $z \in \mathbb{Z}$  tel que  $[t]^{\mathbf{M}} = 2 \times z$ .

3. Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  un ensemble de symboles de fonction où  $\mathcal{F}_2 = \{\otimes\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \{\odot\}$  et  $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ .

- (a) Particulariser la définition de l'ensemble de termes  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$  pour l'ensemble  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ .

- (b) On définit une structure  $\mathbf{M}$  dont le domaine d'interprétation est l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels comme suit :

$$\begin{aligned} a^{\mathbf{M}} &= 2 & \odot^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & \otimes^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ b^{\mathbf{M}} &= 4 & \odot^{\mathbf{M}}(n) &= 2 * n & \otimes^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) &= n_1 * n_2 \end{aligned}$$

- i. Calculer  $[\otimes(\odot(b), a)]^{\mathbf{M}}$

- ii. Montrer que pour tout  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $[t]^{\mathbf{M}} = 2^n$ .

### Exercice 3.2 (( $\star$ ) Entiers naturels et Termes)

Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$  un ensemble de symboles de fonction avec  $\mathcal{F}_0 = \{a\}$  et  $\mathcal{F}_1 = \{s\}$ . Etant donné un entier naturel  $n$ , on note  $s^n(a)$  le terme :

$$s^n(a) = \begin{cases} a & \text{si } n = 0 \\ s(s^k(a)) & \text{si } n = k + 1 \end{cases}$$

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ .
2. Montrer que  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{s^n(a)\}$ .
3. Pour chacune des structures  $\mathbf{M}$  suivantes, exprimer  $[s^n(a)]^{\mathbf{M}}$  en fonction de  $n$ .
  - (a)  $\mathbf{M}$  est la structure de domaine  $\mathbb{N}$  telle que  $a^{\mathbf{M}} = 0$  et  $s^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est la fonction définie par  $s^{\mathbf{M}}(n) = n + 1$ .
  - (b)  $\mathbf{M}$  est la structure de domaine  $\mathbb{N}$  telle que  $a^{\mathbf{M}} = 1$  et  $s^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est la fonction définie par  $s^{\mathbf{M}}(n) = 2n$ .
  - (c)  $\mathbf{M}$  est la structure de domaine  $\mathbb{N}$  telle que  $a^{\mathbf{M}} = 1$  et  $s^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est la fonction définie par  $s^{\mathbf{M}}(n) = n + 2$ .
4. On définit une structure  $\mathbf{M}$  dont le domaine d'interprétation est l'ensemble  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  des couples d'entiers naturels comme suit :

$$a^{\mathbf{M}} = (0, 1) \quad \begin{array}{l} s^{\mathbf{M}} : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \rightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \\ s^{\mathbf{M}}((n_1, n_2)) = (n_2, n_2 + n_1) \end{array}$$

- (a) Calculer  $[s(s(a))]^{\mathbf{M}}$ .
- (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $[s^n(a)]^{\mathbf{M}} = (u_n, u_{n+1})$  où  $u_n$  est le  $n$ -ième nombre de Fibonacci défini par :

$$u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (n \geq 2)$$

5. On définit une structure  $\mathbf{M}$  dont le domaine d'interprétation est l'ensemble  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  des couples d'entiers naturels comme suit :

$$a^{\mathbf{M}} = (1, 1) \quad \begin{array}{l} s^{\mathbf{M}} : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \rightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \\ s^{\mathbf{M}}((n_1, n_2)) = (n_1 + 1, n_1 \times n_2) \end{array}$$

- (a) Calculer  $[s^3(a)]^{\mathbf{M}}$ .
- (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $[s^n(a)]^{\mathbf{M}} = (n + 1, n!)$ .

### Exercice 3.3 ((\*) Entiers naturels et termes)

Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$  un ensemble de symboles de fonction où  $\mathcal{F}_0 = \{Z\}$  et  $\mathcal{F}_1 = \{S\}$ .

1. Soit  $\oplus$  une fonction sur les paires de termes définie par :

$$\oplus : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \times \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \quad \oplus(t_1, t_2) = \begin{cases} t_2 & \text{si } t_1 = Z \\ S(\oplus(t, t_2)) & \text{si } t_1 = S(t) \end{cases}$$

Calculer  $\oplus(S(S(Z)), S(Z))$ .

2. Soit  $\mathbf{M}$  une structure dont le domaine est l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels et telle que  $Z^{\mathbf{M}} = 0$  et  $S^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est la fonction définie par  $S^{\mathbf{M}}(n) = n + 1$ .
  - (a) Calculer  $[\oplus(S(S(Z)), S(Z))]^{\mathbf{M}}$ .
  - (b) Montrer par induction sur  $t_1$ , que pour tous termes  $t_1$  et  $t_2$ ,  $[\oplus(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}} = [t_1]^{\mathbf{M}} + [t_2]^{\mathbf{M}}$ .

### Exercice 3.4 (Arbres binaires et termes)

Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$  un ensemble de symboles de fonction avec  $\mathcal{F}_0 = \{k\}$  et  $\mathcal{F}_2 = \{f\}$ .

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ .

2. Si  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ , à quoi correspond  $[t]^{\mathbf{M}}$  lorsque :
- (a)  $\mathbf{M}$  est la structure de domaine  $\mathbb{N}$  telle que  $k^{\mathbf{M}} = 1$  et  $f^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est la fonction définie par  $f^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) = n_1 + n_2$  ?
  - (b)  $\mathbf{M}$  est la structure de domaine  $\mathbb{N}$  telle que  $k^{\mathbf{M}} = 0$  et  $f^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est la fonction définie par  $f^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) = 1 + \max(n_1, n_2)$  ?
3. Définir une structure  $\mathbf{M}$  telle que pour tout terme  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ ,  $[t]^{\mathbf{M}} = \tau(t)$  où  $\tau(t)$  désigne la taille d'un terme définie inductivement par :

$$\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = k \\ 1 + \tau(t_1) + \tau(t_2) & \text{si } t = f(t_1, t_2) \end{cases}$$

### Exercice 3.5 ((\*) Relations et termes)

Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$  un ensemble de symboles de fonction où  $\mathcal{F}_1 = \{\odot\}$  et  $\mathcal{F}_0$  contient une infinité de symboles de constante numérotés par des entiers :

$$\mathcal{F}_0 = \{k_0, k_1, k_2, \dots\} = \bigcup_{i \geq 0} \{k_i\}$$

Etant donné un entier naturel  $n$ , on note  $\odot^n(k_i)$  le terme :

$$\odot^n(k_i) = \begin{cases} k_i & \text{si } n = 0 \\ \odot(\odot^{n-1}(k_i)) & \text{si } n = m + 1 \end{cases}$$

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ .
2. Soit  $\mathbf{M}_1$  la structure dont le domaine est l'ensemble  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  des couples d'entiers naturels définie par :

$$\begin{aligned} k_i^{\mathbf{M}_1} &= (i, 0) & \odot^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \text{pour tout } k_i \in \mathcal{F}_0 & & \odot^{\mathbf{M}_1}((n_1, n_2)) &= (n_1, n_1 + n_2) \end{aligned}$$

- (a) Calculer  $[\odot(\odot(\odot(k_5)))]^{\mathbf{M}_1}$ .
  - (b) Montrer par induction que pour tout terme  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ , il existe deux entiers naturels  $i$  et  $n$  tels que  $[t]^{\mathbf{M}_1} = (i, i \times n)$ .
  - (c) Montrer par récurrence que pour tous entiers naturels  $n$  et  $i$  il existe un terme  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$  tel que  $[t]^{\mathbf{M}_1} = (i, i \times n)$ .
  - (d) En déduire que  $\{[t]^{\mathbf{M}_1} \mid t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})\} = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n_2 \text{ est un multiple de } n_1\}$
3. Soit  $\mathbf{M}_2$  la structure dont le domaine est l'ensemble  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  des couples d'entiers naturels définie par :

$$\begin{aligned} k_i^{\mathbf{M}_2} &= (i, i) & \odot^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \text{pour tout } k_i \in \mathcal{F}_0 & & \odot^{\mathbf{M}_2}((n_1, n_2)) &= (n_1, n_2 + 1) \end{aligned}$$

- (a) Calculer  $[\odot^5(k_3)]^{\mathbf{M}_2}$ .
- (b) Montrer (par récurrence sur  $n$ ) que  $[\odot^n(k_m)]^{\mathbf{M}_2} = (m, m + n)$ .
- (c) Soient  $n_1, n_2, n$  et  $m$  des entiers naturels tels que  $[\odot^n(k_m)]^{\mathbf{M}_2} = (n_1, n_2)$ . Exprimer  $n$  et  $m$  en fonction de  $n_1$  et  $n_2$ . En déduire que si  $n_1 \leq n_2$ , alors il existe un terme  $t$  tel que  $[t]^{\mathbf{M}_2} = (n_1, n_2)$ .
- (d) Montrer par induction sur  $t$ , que si  $[t]^{\mathbf{M}_2} = (n_1, n_2)$  alors  $n_1 \leq n_2$ .

- (e) En déduire que  $\{[t]^{\mathbf{M}_2} \mid t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})\} = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n_1 \leq n_2\}$ .
4. Soit  $\mathbf{M}_3$  la structure dont le domaine est l'ensemble  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  des couples d'entiers naturels définie par :

$$\begin{aligned} k_i^{\mathbf{M}_3} &= (0, i) & \odot^{\mathbf{M}_3} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \text{pour tout } k_i \in \mathcal{F}_0 & & \odot^{\mathbf{M}_3}((n_1, n_2)) &= (n_1 + 1, n_2 + 1) \end{aligned}$$

- (a) Calculer  $[\odot^3(k_5)]^{\mathbf{M}_3}$ .
- (b) Montrer (par récurrence sur  $n$ ) que  $[\odot^n(k_m)]^{\mathbf{M}_3} = (n, m + n)$ .
- (c) Soient  $n_1, n_2, n$  et  $m$  des entiers naturels tels que  $[\odot^n(k_m)]^{\mathbf{M}_3} = (n_1, n_2)$ . Exprimer  $n$  et  $m$  en fonction de  $n_1$  et  $n_2$ . En déduire que  $[\odot^n(k_m)]^{\mathbf{M}_3} = [\odot^m(k_n)]^{\mathbf{M}_2}$ .
- (d) En déduire que  $\{[t]^{\mathbf{M}_3} \mid t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})\} = \{[t]^{\mathbf{M}_2} \mid t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})\}$ .

### Exercice 3.6 (Evaluation d'expressions booléennes)

Soit  $x \cdot \bar{y} + (\bar{y} + x)$  une expression booléenne. En utilisant la définition des opérateurs booléens calculer le résultat de l'évaluation de cette expression, puis le vérifier à l'aide d'un raisonnement équationnel lorsque :

1.  $x = y = 1$
2.  $x = 0$  et  $y = 1$

### Exercice 3.7 (Raisonnement équationnel)

A l'aide d'un raisonnement équationnel, montrer les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \quad \overline{\bar{x} + y} + z &\equiv (\bar{\bar{x}} + z) \cdot (\bar{y} + z) & (2) \quad (\bar{x} + y) \cdot \overline{\bar{y} + \bar{x}} &\equiv 0 \\ (3) \quad \overline{x \cdot \bar{y}} + \bar{x} + \bar{y} &\equiv 1 & (4) \quad (\bar{x} + \bar{y}) \cdot y + x &\equiv 1 \\ (5) \quad \overline{x + y} + (x \cdot y) &\equiv (\bar{x} + y) \cdot (\bar{y} + x) \end{aligned}$$

### Exercice 3.8 (Raisonnement équationnel, structures et interprétations)

Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = \{a_1, a_2, s, o\}$  un ensemble de symboles de fonction contenant uniquement quatre constantes. Dans cet exercice, on considère uniquement des structures dont le domaine d'interprétation est l'ensemble  $|\mathbf{M}| = \{\text{rouge}, \text{vert}\}$ . On note  $\mathbf{E}$  l'ensemble de ces structures. Chaque structure  $\mathbf{M}$  de  $\mathbf{E}$  associe donc une couleur (soit vert, soit rouge) aux constantes de  $\mathcal{F}_0$ . Soit  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \{\text{est\_rouge}\}$  l'ensemble contenant uniquement un prédicat unaire. On suppose que pour les structures  $\mathbf{M}$  de  $\mathbf{E}$ , l'interprétation de ce symbole de prédicat est :

$$\text{est\_rouge}^{\mathbf{M}} = \{\text{rouge}\}$$

Etant données une constante  $k \in \mathcal{F}_0$  et une structure  $\mathbf{M} \in \mathbf{E}$ , on note  $x_k^{\mathbf{M}}$  la valeur booléenne de  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(\text{est\_rouge}(k))$  et on a donc :

$$\begin{aligned} [\text{est\_rouge}(k)]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(\text{est\_rouge}(k)) &= x_k^{\mathbf{M}} = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad k^{\mathbf{M}} = \text{rouge} \\ [\text{est\_rouge}(k)]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(\text{est\_rouge}(k)) &= x_k^{\mathbf{M}} = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad k^{\mathbf{M}} = \text{vert} \end{aligned}$$

1. Soit  $k_1$  et  $k_2$  deux constantes de  $\mathcal{F}_0$ .
  - (a) Proposer une formule  $F_{k_1, k_2} \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$  permettant d'exprimer que  $k_1$  et  $k_2$  ont la même couleur.
  - (b) Calculer l'expression booléenne  $f(x_{k_1}^{\mathbf{M}}, x_{k_2}^{\mathbf{M}}) = [F_{k_1, k_2}]^{\mathbf{M}}$ .

(c) Etant donnés  $k_1, k_2, k_3 \in \mathcal{F}_0$ , montrer que :

$$f(x_{k_1}^{\mathbf{M}}, x_{k_2}^{\mathbf{M}}) \cdot f(x_{k_1}^{\mathbf{M}}, x_{k_3}^{\mathbf{M}}) \equiv (x_{k_1}^{\mathbf{M}} \cdot x_{k_2}^{\mathbf{M}} \cdot x_{k_3}^{\mathbf{M}}) + (\overline{x_{k_1}^{\mathbf{M}}} \cdot \overline{x_{k_2}^{\mathbf{M}}} \cdot \overline{x_{k_3}^{\mathbf{M}}})$$

2. On souhaite que :

- si  $s$  est vert, alors  $a_1$  et  $o$  ont la même couleur
- si  $s$  est rouge, alors  $a_2$  et  $o$  ont la même couleur

(a) Proposer deux formules  $F_1$  et  $F_2$  de  $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$  exprimant ces deux propriétés.

(b) Calculer l'expression booléenne  $[F_1 \wedge F_2]^{\mathbf{M}}$  en fonction de  $x_s^{\mathbf{M}}$ ,  $f(x_o^{\mathbf{M}}, x_{a_1}^{\mathbf{M}})$  et  $f(x_o^{\mathbf{M}}, x_{a_2}^{\mathbf{M}})$ .

(c) Montrer que :

$$[F_1 \wedge F_2]^{\mathbf{M}} \equiv x_o^{\mathbf{M}} \cdot (x_s^{\mathbf{M}} \cdot x_{a_2}^{\mathbf{M}} + \overline{x_s^{\mathbf{M}}} \cdot x_{a_1}^{\mathbf{M}} + x_{a_1}^{\mathbf{M}} \cdot x_{a_2}^{\mathbf{M}}) + \overline{x_o^{\mathbf{M}}} \cdot (x_s^{\mathbf{M}} \cdot \overline{x_{a_2}^{\mathbf{M}}} + \overline{x_s^{\mathbf{M}}} \cdot \overline{x_{a_1}^{\mathbf{M}}} + \overline{x_{a_1}^{\mathbf{M}}} \cdot \overline{x_{a_2}^{\mathbf{M}}})$$

(d) Montrer que pour tous booléens  $x, y$  et  $z$ ,  $x \cdot z + \overline{x} \cdot y + y \cdot z \equiv x \cdot z + \overline{x} \cdot y$ . En déduire que :

$$[F_1 \wedge F_2]^{\mathbf{M}} \equiv x_o^{\mathbf{M}} \cdot (x_s^{\mathbf{M}} \cdot x_{a_2}^{\mathbf{M}} + \overline{x_s^{\mathbf{M}}} \cdot x_{a_1}^{\mathbf{M}}) + \overline{x_o^{\mathbf{M}}} \cdot (x_s^{\mathbf{M}} \cdot \overline{x_{a_2}^{\mathbf{M}}} + \overline{x_s^{\mathbf{M}}} \cdot \overline{x_{a_1}^{\mathbf{M}}})$$

(e) Montrer que pour tous booléens  $x, y$  et  $z$ ,  $x \cdot y + \overline{x} \cdot z \equiv \overline{x \cdot y} + \overline{x} \cdot \overline{z}$ . En déduire que si l'on suppose que  $[F_1 \wedge F_2]^{\mathbf{M}} = 1$ , alors  $x_o^{\mathbf{M}} \equiv x_s^{\mathbf{M}} \cdot x_{a_2}^{\mathbf{M}} + \overline{x_s^{\mathbf{M}}} \cdot x_{a_1}^{\mathbf{M}}$ .

### Exercice 3.9 (Structures et interprétations)

A partir des ensembles  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = \{c, d\}$  et  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p, q\}$  on définit la formule :

$$F = (p(c, d) \Rightarrow q(c, d)) \Rightarrow (\neg p(c, d) \Rightarrow \neg q(c, d))$$

1. Soit  $\mathbf{M}$  une structure, calculer  $[F]^{\mathbf{M}}$ .
2. Définir une structure  $\mathbf{M}_1$  telle que  $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$ .
3. Définir une structure  $\mathbf{M}_2$  telle que  $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$ .

### Exercice 3.10 (Structures et interprétations)

A partir des ensembles  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = \{a, b\}$  et  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p, eq\}$  où  $eq$  désigne le prédicat d'égalité, on définit la formule  $F = p(a, b) \Rightarrow eq(a, b)$ .

1. Existe-t-il une structure  $\mathbf{M}$  dont le domaine d'interprétation  $|\mathbf{M}|$  est un singleton et telle que  $[F]^{\mathbf{M}} = 0$  ? Pourquoi ?
2. On considère des structures  $\mathbf{M}$  dont le domaine d'interprétation contient uniquement deux éléments distincts ( $|\mathbf{M}| = \{k_1, k_2\}$ ).
  - (a) Combien d'interprétations sont possibles pour le prédicat  $p$  ?
  - (b) Combien d'interprétations des symboles de constante  $a$  et  $b$  sont telles que  $[eq(a, b)]^{\mathbf{M}} = 1$  ?
3. Définir une structure  $\mathbf{M}_1$  telle que  $[F]^{\mathbf{M}_1} = 0$  et une structure  $\mathbf{M}_2$  telle que  $[F]^{\mathbf{M}_2} = 1$ .

### Exercice 3.11 ( $(\star)$ Structures et interprétations)

1. A partir des ensembles  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  où  $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \{\odot\}$  et  $\mathcal{F}_2 = \{\oplus\}$  et  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p\}$ , on définit la formule  $F = p(\odot(a), \oplus(a, b)) \Rightarrow p(\oplus(a, b), \odot(a))$ .
  - (a) Définir une structure  $\mathbf{M}_1$  telle que  $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$ .
  - (b) Définir une structure  $\mathbf{M}_2$  telle que  $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$ .

2. A partir des ensembles  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$  où  $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$  et  $\mathcal{F}_2 = \{r, s\}$  et  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p\}$ , on définit la formule  $F = p(b, s(a, r(b, a))) \wedge p(s(b, b), a)$ .
  - (a) Définir une structure  $\mathbf{M}_1$  telle que  $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$ .
  - (b) Définir une structure  $\mathbf{M}_2$  telle que  $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$ .
3. A partir des ensembles  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  où  $\mathcal{F}_0 = \{k_1, k_2\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \{f\}$  et  $\mathcal{F}_2 = \{g\}$  et  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p\}$ , on définit la formule  $F = p(f(k_1), k_1) \vee p(g(k_1, f(k_1)), k_2)$ .
  - (a) Définir une structure  $\mathbf{M}_1$  telle que  $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$ .
  - (b) Définir une structure  $\mathbf{M}_2$  telle que  $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$ .
4. A partir des ensembles  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  où  $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \{\odot\}$  et  $\mathcal{F}_2 = \{\otimes\}$  et  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p\}$ , on définit la formule  $F = p(\odot(a), \odot(b)) \Rightarrow (p(\otimes(a, b), a) \vee p(\otimes(a, b), b))$ .
  - (a) Définir une structure  $\mathbf{M}_1$  telle que  $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$ .
  - (b) Définir une structure  $\mathbf{M}_2$  telle que  $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$ .

### Exercice 3.12 ((\*) Structures et interprétations)

Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$  un ensemble de symboles de fonction avec  $\mathcal{F}_0 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{k_i\}$  et  $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \odot\}$ , et  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p, q\}$  un ensemble de symboles de prédicat.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$  pour l'ensemble  $\mathcal{F}$ .
2. Donner une définition inductive du nombre d'occurrences  $nb_{op}(t)$  de symboles de  $\mathcal{F}_2$ , et du nombre d'occurrences  $nb_k(t)$  de symboles de constante de  $\mathcal{F}_0$ , dans un terme  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ .
3. Montrer par induction sur  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$  que  $nb_{op}(t) = nb_k(t) - 1$ .
4. Soit  $\mathbf{M}_1$  la structure dont le domaine  $|\mathbf{M}_1| = \wp_f(\mathbb{N})$  est l'ensemble des parties finies de  $\mathbb{N}$  (chaque élément  $E$  de  $|\mathbf{M}_1|$  est donc un ensemble fini d'entiers) telle que :

$$\begin{aligned}
 k_i^{\mathbf{M}_1} &= \{0, 1, \dots, i\} & \oplus^{\mathbf{M}_1} : \wp_f(\mathbb{N}) \times \wp_f(\mathbb{N}) &\rightarrow \wp_f(\mathbb{N}) \\
 &= \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq i\} & \oplus^{\mathbf{M}_1}(E_i, E_j) &= E_i \cup E_j \\
 \ominus^{\mathbf{M}_1} : \wp_f(\mathbb{N}) \times \wp_f(\mathbb{N}) &\rightarrow \wp_f(\mathbb{N}) & \odot^{\mathbf{M}_1} : \wp_f(\mathbb{N}) \times \wp_f(\mathbb{N}) &\rightarrow \wp_f(\mathbb{N}) \\
 \ominus^{\mathbf{M}_1}(E_i, E_j) &= E_i \setminus E_j & \odot^{\mathbf{M}_1}(E_i, E_j) &= E_i \cap E_j
 \end{aligned}$$

- (a) Calculer  $[\oplus(k_i, k_j)]^{\mathbf{M}_1}$  lorsque  $i \leq j$ .
- (b) Calculer  $[\ominus(k_i, k_j)]^{\mathbf{M}_1}$  lorsque  $i \geq j$ .
- (c) Calculer  $[\odot(k_i, k_j)]^{\mathbf{M}_1}$  lorsque  $i \leq j$ .
- (d) Donner un terme  $t$  tel que  $[t]^{\mathbf{M}_1} = \{2, 3, 7\}$ .
5. Etant donnés deux termes  $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ , on définit la formule :

$$F_{t_1, t_2} = (p(t_1, t_2) \Rightarrow q(\odot(t_1, t_2), t_1)) \wedge (q(\odot(t_1, t_2), t_1) \Rightarrow p(t_1, t_2))$$

- (a) Montrer que  $[F_{t_1, t_2}]^{\mathbf{M}} = 1$  lorsque  $\mathbf{M}$  est une structure telle que :

$$p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) \in |\mathbf{M}| \times |\mathbf{M}| \mid (\odot^{\mathbf{M}}(m_1, m_2), m_1) \in q^{\mathbf{M}}\}$$

- (b) On complète la structure  $\mathbf{M}_1$  de la question 4 en interprétant le symbole  $q$  par la relation d'égalité sur les ensembles :

$$q^{\mathbf{M}_1} = \{(E_1, E_2) \mid E_1 = E_2\}$$

Si la structure  $\mathbf{M}_1$  vérifie la propriété de la question précédente, quelle est la relation sur les ensembles définie par  $p^{\mathbf{M}_1}$  ?

**Exercice 3.13 (Formules équivalentes)**

On considère les formules atomiques  $A, B, C \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$  à partir desquelles sont définies les formules  $F_1 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow C$  et  $F_2 = (\neg A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$ .

1. Etant donnée une structure  $\mathbf{M}$ , calculer les expressions booléennes  $[F_1]^\mathbf{M}$  et  $[F_2]^\mathbf{M}$  en fonction de  $\mathbf{I}_\mathbf{M}(A)$ ,  $\mathbf{I}_\mathbf{M}(B)$  et  $\mathbf{I}_\mathbf{M}(C)$  (sans effectuer de simplifications).
2. A l'aide d'un raisonnement équationnel, en indiquant le nom de l'équivalence utilisée à chaque étape, transformer ces expressions pour montrer que  $F_1 \models F_2$ .

**Exercice 3.14 (Formules équivalentes)**

On considère les formules atomiques  $A, B \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$  à partir desquelles sont définies les formules  $F_1 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow A$  et  $F_2 = A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ .

1. Construire et simplifier (par un raisonnement équationnel) les expressions booléennes  $[F_1]^\mathbf{M}$  et  $[F_2]^\mathbf{M}$ .
2. A-t-on  $F_1 \models F_2$  ? (justifier)

**Exercice 3.15 (Formules valides)**

On considère les formules atomiques  $A, B \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$  à partir desquelles sont définies les formules  $F_1 = (A \Rightarrow \neg A) \vee (\neg A \Rightarrow A)$  et  $F_2 = (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow \neg B)$ .

1. Etant donnée une structure  $\mathbf{M}$ , calculer les expressions booléennes  $[F_1]^\mathbf{M}$  et  $[F_2]^\mathbf{M}$  en fonction de  $\mathbf{I}_\mathbf{M}(A)$  et  $\mathbf{I}_\mathbf{M}(B)$  (sans effectuer de simplifications).
2. A l'aide d'un raisonnement équationnel, en indiquant le nom de l'équivalence utilisée à chaque étape, montrer que les formules  $F_1$  et  $F_2$  sont valides.

**Exercice 3.16 (Formules valides, formules satisfiables)**

Soit  $A, B \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$  deux formules atomiques. Les formules suivantes sont-elles satisfiables ? sont-elles valides ?

$$\begin{array}{ll}
 F_1 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) & F_2 = ((A \vee B) \wedge \neg A) \Rightarrow B \\
 F_3 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A) & F_4 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B) \\
 F_5 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow A & F_6 = A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \\
 F_7 = (A \wedge \neg A) \Rightarrow B & F_8 = (\neg A \vee B) \Rightarrow (B \Rightarrow A) \\
 F_9 = (A \vee \neg A) \Rightarrow B & F_{10} = (\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \\
 F_{11} = (\neg A \vee B) \wedge \neg(\neg B \Rightarrow \neg A) & F_{12} = (A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)
 \end{array}$$

**Exercice 3.17 ((\*) Conséquence sémantique)**

1. Soit  $F$  une formule non satisfiable et  $G$  une formule ni valide, ni non satisfiable.
  - (a) A-t-on  $F \models G$  ? (Justifier)
  - (b) A-t-on  $G \models F$  ? (Justifier)
  - (c) A-t-on  $\neg F \models G$  ? (Justifier)
  - (d) A-t-on  $G \models \neg F$  ? (Justifier)
2. Mêmes questions si  $F$  une formule valide et  $G$  une formule ni valide, ni non satisfiable.

**Exercice 3.18 (Conséquence sémantique)**

Soit  $A, B, C \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$  trois formules atomiques. Les conséquences sémantiques suivantes sont-elles vérifiées ?

$$\begin{array}{ll}
 (1) : \{A \vee B, A \Rightarrow C, B \Rightarrow C\} \models C & (2) : A \Rightarrow B \models \neg B \Rightarrow \neg A \\
 (3) : \{A \vee B, \neg A\} \models B & (4) : A \Rightarrow B \models B \Rightarrow A \\
 (5) : \{\neg(A \vee B), C \Rightarrow B\} \models \neg(A \vee C) & (6) : A \Rightarrow B \models \neg A \Rightarrow \neg B \\
 (7) : \{A \Rightarrow B, \neg B\} \models \neg A & (8) : \{A \Rightarrow B, \neg A\} \models \neg B \\
 (9) : \{\neg B \Rightarrow \neg A, A\} \models B & (10) : \{\neg A \Rightarrow \neg B, A\} \models B
 \end{array}$$

**Exercice 3.19 ((\*) Formules valides, conséquence sémantique)**

Soit  $F$  la formule  $((A \vee \neg B) \wedge B) \Rightarrow A$ .

1. Etant donnée une structure  $\mathbf{M}$ , calculer l'expression booléenne  $[F]^{\mathbf{M}}$  en fonction de  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$  et  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)$  (sans effectuer de simplification).
2. En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que  $F$  est une formule valide (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
3. A-t-on  $(A \vee \neg B) \wedge B \models A$ ? (justifier)
4. Soit  $F_1$  une formule quelconque. A-t-on  $\neg F \models F_1$ ? (justifier)
5. Soit  $F_2$  une formule telle que  $F \models F_2$ . La formule  $F_2$  est-elle satisfiable? valide? (justifier)

**Exercice 3.20 ((\*) Formules équivalentes)**

Soit  $F_1 = (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$  et  $F_2 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$  deux formules.

1. Etant donnée une structure  $\mathbf{M}$ , calculer les expressions booléennes  $[F_1]^{\mathbf{M}}$  et  $[F_2]^{\mathbf{M}}$  en fonction de  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$  et  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)$  (sans effectuer de simplification).
2. En utilisant un raisonnement équationnel, simplifier les expressions booléennes  $[F_1]^{\mathbf{M}}$  et  $[F_2]^{\mathbf{M}}$  (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
3. En déduire que  $F_1 \models F_2 \models B \Rightarrow A$ .

**Exercice 3.21 ((\*) Formules valides, formules satisfiables, formules équivalentes)**

1. Soit  $F_1$  et  $F_2$  deux formules de  $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ .
  - (a) Montrer que si  $F_1$  est valide alors  $F_1 \wedge F_2 \models F_2$ .
  - (b) Montrer que si  $F_1$  est insatisfiable alors  $F_1 \vee F_2 \models F_2$ .
2. Soit  $F = (A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$  et  $F' = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$  deux formules de  $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ , où  $A$  et  $B$  sont deux formules atomiques.
  - (a) Etant donnée une structure  $\mathbf{M}$ , calculer les expressions booléennes  $[F]^{\mathbf{M}}$  et  $[F']^{\mathbf{M}}$  en fonction de  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$  et  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)$  (sans effectuer de simplification).
  - (b) En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que les expressions booléennes  $[F]^{\mathbf{M}}$  et  $[F']^{\mathbf{M}}$  sont équivalentes à l'expression booléenne :

$$(\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)) \cdot (\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A))$$

- (c) Peut-on en déduire que  $F \models (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ? Justifier.
- (d) En déduire que  $F$  est une formule valide si et seulement si  $A \models B$  (justifier avec une démonstration).

**Exercice 3.22 ((\*) Formules valides, formules satisfiables, formules équivalentes)**

Soit les formules  $F_1 = (\neg A \vee A) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$  et  $F_2 = (B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \vee A)$ .

1. Etant donnée une structure  $\mathbf{M}$ , calculer les expressions booléennes  $[F_1]^{\mathbf{M}}$  et  $[F_2]^{\mathbf{M}}$  en fonction de  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$  et  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)$  (sans effectuer de simplification).
2. En utilisant un raisonnement équationnel, simplifier les expressions booléennes  $[F_1]^{\mathbf{M}}$  et  $[F_2]^{\mathbf{M}}$  (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
3. Les formules  $F_1$  et  $F_2$  sont-elles satisfiables? valides? (justifier)

4. Soit la formule  $F_3 = (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \vee A)$ , que pouvez-vous dire de  $[F_3]^{\mathbf{M}}$ ? (justifier)
5. A-t-on  $\neg F_2 \models F_1$ ? (justifier)

**Exercice 3.23 (Formules insatisfiables)**

Soit  $F$  la formule  $(A \Rightarrow B) \wedge (A \wedge \neg B)$ .

1. Etant donnée une structure  $\mathbf{M}$ , calculer l'expression booléenne  $[F]^{\mathbf{M}}$  en fonction de  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$  et  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)$  (sans effectuer de simplification).
2. En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que la formule  $F$  est insatisfiable (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
3. Soit  $F'$  une formule quelconque, a-t-on  $F \models F'$ ?

**Exercice 3.24 (Conséquence sémantique)**

Retrouver les conclusions obtenues dans les exercices 2.3, 2.4 et 2.5 en utilisant la notion de conséquence sémantique.