



TD4 : Règles de déduction sur les quantificateurs

Les exercices annotés par le symbole \star correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur la page web de l'UE.

Exercice 4.1 En utilisant les règles de la déduction naturelle, prouver les formules suivantes.

1. Quantificateur universel

$$\begin{aligned} (G_1) \quad & (\forall x (p(x) \wedge q(x))) \Rightarrow (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x)) \\ (G_2) \quad & (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x)) \Rightarrow \forall x (p(x) \wedge q(x)) \\ (\star) \quad (G_3) \quad & (\forall x p(x) \vee \forall x q(x)) \Rightarrow \forall x (p(x) \vee q(x)) \end{aligned}$$

2. Quantificateur existentiel

$$\begin{aligned} (\star) \quad (G_4) \quad & (\exists x (p(x) \wedge q(x))) \Rightarrow (\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)) \\ (G_5) \quad & (\exists x (p(x) \vee q(x))) \Rightarrow (\exists x p(x) \vee \exists x q(x)) \\ (G_6) \quad & (\exists x p(x) \vee \exists x q(x)) \Rightarrow \exists x (p(x) \vee q(x)) \end{aligned}$$

3. Ordre sur les quantificateurs

$$\begin{aligned} (G_7) \quad & (\exists x \exists y r(x, y)) \Rightarrow (\exists y \exists x r(x, y)) \\ (G_8) \quad & (\exists x \forall y r(x, y)) \Rightarrow (\forall y \exists x r(x, y)) \end{aligned}$$

4. Quantification et implication

$$\begin{aligned} (G_9) \quad & ((\forall x (p(x) \Rightarrow q(x))) \wedge (\exists x p(x))) \Rightarrow \exists x q(x) \\ (G_{10}) \quad & (\forall x (p(x) \Rightarrow \neg q(x))) \Rightarrow \neg \exists x (p(x) \wedge q(x)) \end{aligned}$$

5. Equivalences entre quantificateurs

$$\begin{aligned} (\star) \quad (G_{11}) \quad & (\forall x \neg p(x)) \Rightarrow (\neg \exists x p(x)) & (\star) \quad (G_{12}) \quad & (\neg \exists x p(x)) \Rightarrow (\forall x \neg p(x)) \\ (G_{13}) \quad & (\exists x \neg p(x)) \Rightarrow (\neg \forall x p(x)) & (G_{14}) \quad & (\neg \forall x p(x)) \Rightarrow (\exists x \neg p(x)) \end{aligned}$$

6. « tiers exclu » sur les quantificateurs

$$(G_{15}) \quad (\forall x p(x)) \vee (\exists x \neg p(x))$$

Exercice 4.2 (\star)

En utilisant les règles de la déduction naturelle, prouver la formule $(F_1 \wedge F_2) \Rightarrow F_3$ lorsque :

1. $F_1 = \forall x (p(x) \Rightarrow q(x))$, $F_2 = \exists x (q(x) \Rightarrow r(x))$, et $F_3 = \exists x (p(x) \Rightarrow r(x))$
2. $F_1 = \exists x (p(x) \Rightarrow q(x))$, $F_2 = \forall x (q(x) \Rightarrow r(x))$ et $F_3 = \exists x (p(x) \Rightarrow r(x))$

Exercice 4.3 (\star)

En utilisant les règles de la déduction naturelle, prouver les formules :

$$\begin{aligned} (F_1) \quad & \forall x ((\exists y \forall z p(x, y, z)) \Rightarrow \exists z p(x, z, z)) \\ (F_2) \quad & \exists x \forall y \neg p(x, y) \Rightarrow \neg \forall x \exists y p(x, y) \\ (F_3) \quad & \forall x (p(x, f(x)) \vee \exists y p(x, f(y))) \Rightarrow \forall x \exists y p(x, y) \end{aligned}$$

Exercice 4.4 En utilisant les règles de la déduction naturelle prouver les formules suivantes (dans toutes ces formules, a est un symbole de constante).

$$\begin{array}{ll}
(G_1) \quad ((\forall x p(x)) \wedge q(a)) \Leftrightarrow \forall x (p(x) \wedge q(a)) & (G_2) \quad ((\forall x p(x)) \vee q(a)) \Leftrightarrow \forall x (p(x) \vee q(a)) \\
(G_3) \quad ((\exists x p(x)) \wedge q(a)) \Leftrightarrow \exists x (p(x) \wedge q(a)) & (G_4) \quad ((\exists x p(x)) \vee q(a)) \Leftrightarrow \exists x (p(x) \vee q(a)) \\
(G_5) \quad ((\forall x p(x)) \Rightarrow q(a)) \Leftrightarrow \exists x (p(x) \Rightarrow q(a)) & (G_6) \quad ((\exists x p(x)) \Rightarrow q(a)) \Leftrightarrow \forall x (p(x) \Rightarrow q(a)) \\
(G_7) \quad (q(a) \Rightarrow (\forall x p(x))) \Leftrightarrow \forall x (q(a) \Rightarrow p(x)) & (G_8) \quad (q(a) \Rightarrow (\exists x p(x))) \Leftrightarrow \exists x (q(a) \Rightarrow p(x))
\end{array}$$

Exercice 4.5 ((*) Involutions et bijections)

On considère un langage logique avec variables muni du symbole de fonction unaire $f \in \mathcal{F}_1$ et du symbole de prédicat binaire $\text{eq} \in \mathcal{P}_2$ d'égalité. Formellement ce prédicat désigne une relation d'équivalence qui est une congruence pour f , c-à-d vérifie les quatre formules suivantes :

$$\begin{array}{ll}
(F_1) \quad \forall x \text{eq}(x, x) & \text{(réflexivité)} \\
(F_2) \quad \forall x \forall y (\text{eq}(x, y) \Rightarrow \text{eq}(y, x)) & \text{(symétrie)} \\
(F_3) \quad \forall x \forall y \forall z ((\text{eq}(x, y) \wedge \text{eq}(y, z)) \Rightarrow \text{eq}(x, z)) & \text{(transitivité)} \\
(F_4) \quad \forall x \forall y (\text{eq}(x, y) \Rightarrow \text{eq}(f(x), f(y))) & \text{(congruence)}
\end{array}$$

On considère les formules F_5 , F_6 et F_7 qui expriment respectivement que la fonction f est involutive, injective et surjective :

$$\begin{array}{ll}
(F_5) \quad \forall x \text{eq}(x, f(f(x))) & \text{(involution)} \\
(F_6) \quad \forall x_1 \forall x_2 (\text{eq}(f(x_1), f(x_2)) \Rightarrow \text{eq}(x_1, x_2)) & \text{(injection)} \\
(F_7) \quad \forall y \exists x \text{eq}(y, f(x)) & \text{(surjection)}
\end{array}$$

1. En utilisant les règles de la déduction naturelle, montrer que toute fonction involutive est injective, c-à-d que la formule F_6 est prouvable à partir des hypothèses F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5 . Afin d'alléger la preuve, on pourra utiliser les trois règles dérivées suivantes qui permettent d'éliminer deux ou trois quantificateurs universels (simultanément) en tête d'une formule à partir d'une hypothèse pour prouver une formule.

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n,$ $h : \forall x \forall y A$ montrons $A[x := t_1][y := t_2]$ $\langle i \rangle$ CQFD (D_V^2 avec h)	$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n,$ $h : \forall x \forall y \forall z A$ montrons $A[x := t_1][y := t_2][z := t_3]$ $\langle i \rangle$ CQFD (D_V^3 avec h)
--	---

Indication. Il s'agit de formaliser le raisonnement suivant : si $f(x_1) = f(x_2)$, alors en appliquant f des deux côtés de l'égalité on obtient $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ et puisque f est involutive on a $f(f(x_1)) = x_1$ et $f(f(x_2)) = x_2$ et donc $x_1 = x_2$.

2. En utilisant les règles de la déduction naturelle, montrer que toute fonction involutive est surjective, c-à-d que la formule F_7 est prouvable à partir des hypothèses F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5 .

Indication. Il s'agit de formaliser le raisonnement suivant : étant donné y , $x = f(y)$ vérifie $y = f(x)$ car $f(f(y)) = y$ puisque f est involutive.

Exercice 4.6 ((*) Logique équationnelle)

On considère un langage logique comprenant le symbole de prédicat d'égalité d'arité 2 noté eq et on ajoute aux règles de la déduction naturelle les deux règles suivantes permettant de raisonner sur des formules contenant ce prédicat.

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons $eq(t, t)$ $\langle i \rangle$ CQFD (I_{eq})	<div> $\langle i + 1 \rangle$ CQFD </div> <div> $\langle i + 2 \rangle$ montrons $eq(t, t')$ <div> \dots </div> $\langle i + 2 \rangle$ CQFD </div> $\langle i \rangle$ CQFD (E_{eq})
---	---

La règle I_{eq} est un axiome et énonce que la formule $eq(t, t)$ est prouvable pour tout terme t . La règle E_{eq} exprime que si l'on dispose d'une preuve de la formule $F[x := t']$ (c-à-d d'une preuve de la formule F dans laquelle x est substitué par le terme t') et d'une preuve de l'égalité $eq(t, t')$, alors on peut prouver la formule $F[x := t]$ (c-à-d la formule F dans laquelle x est substitué par le terme t). Prouver les deux formules ci-dessous exprimant que l'égalité est symétrique et transitive :

1. $\forall x \forall y (eq(x, y) \Rightarrow eq(y, x))$

Indication : étant données trois variables x' , y' et w et la formule $F = eq(y', w)$, calculer $F[w := y']$ et $F[w := x']$ pour comprendre comment utiliser la règle E_{eq} .

2. $\forall x \forall y \forall z ((eq(x, y) \wedge eq(y, z)) \Rightarrow eq(x, z))$

Indication : étant données trois variables x' , z' et w et la formule $F = eq(w, z')$, calculer $F[w := y']$ et $F[w := x']$ pour comprendre comment utiliser la règle E_{eq} .