

**Examen 1ère session du 8/01/2016**

**Durée 2h**

Le seul document autorisé est le formulaire de règles de la Dédution Naturelle.

Téléphones, Calculatrices et Ordinateurs interdits.

Inscrire votre numéro d'anonymat sur votre copie.

La note (entre 0 et 80) est le minimum entre 80 et la somme des points obtenus (entre 0 et 87).

**Exercice 1 (3+(1+1)+(4+3+3)=15 points)**

1. Etant données deux formules de la logique des propositions  $F_1$  et  $F_2$ , donner la définition (mathématique) de  $F_1 \models F_2$ .
2. Soit  $p$  un symbole de proposition.
  - (a) A-t-on  $p \wedge \neg p \models p \vee \neg p$  ? (Justifier.)
  - (b) A-t-on  $p \vee \neg p \models p \wedge \neg p$  ? (Justifier.)
3. On considère la formule  $F = (\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg q \Rightarrow \neg p)$ .
  - (a) Etant donnée une interprétation  $\mathbf{I}$ , calculer  $[F]^\mathbf{I}$ .
  - (b) La formule  $F$  est-elle satisfiable ? La formule  $\neg F$  est-elle satisfiable ? (Justifier.)
  - (c) La formule  $F$  est-elle valide ? La formule  $\neg F$  est-elle valide ? (Justifier.)

**Exercice 2 (3+3+3=9 points)**

Eva, Raoul et Scoubidou sont tous les trois accusés d'un crime et ils font les déclarations suivantes :

Eva : “Si Scoubidou est innocent, alors Raoul est coupable.”  
Raoul : “ Si Eva est coupable, alors je suis aussi coupable.”  
Scoubidou : “ Si Eva est innocente alors Raoul est coupable.”

1. A l'aide des trois propositions :

$e$  : Eva est coupable     $r$  : Raoul est coupable     $s$  : Scoubidou est coupable

formaliser les déclarations de Eva, Raoul et Scoubidou.

2. On suppose que tous les trois disent la vérité. Que peut-on dire sur la culpabilité de Eva, de Raoul, de Scoubidou ? (justifier vos réponses en utilisant la notion de conséquence sémantique)
3. L'enquête montre que Eva est coupable et que Raoul et Scoubidou sont innocents. Déterminer qui a menti et qui a dit la vérité.

**Exercice 3 (12+12=24 points)**

On considère les trois formules ci-dessous.

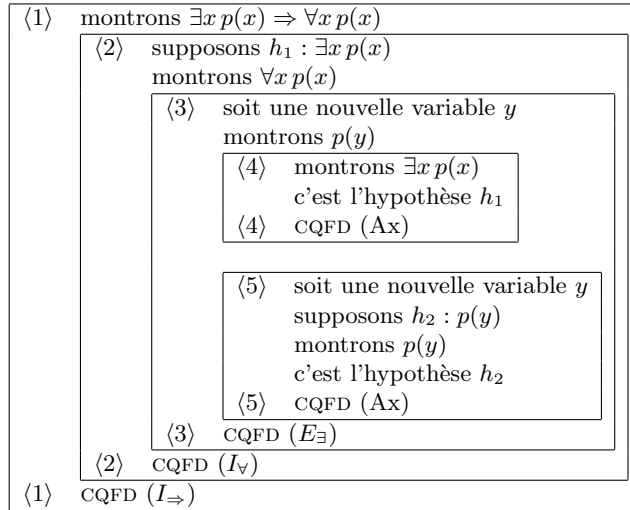
- $(F_1) \quad \forall x (p(x) \vee q(x)) \Rightarrow ((\forall x p(x)) \vee (\forall x q(x)))$   
 $(F_2) \quad ((\forall x p(x)) \vee (\forall x q(x))) \Rightarrow \forall x (p(x) \vee q(x))$   
 $(F_3) \quad \forall x \exists y p(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$

1. Quelles sont parmi ces formules celles qui sont valides ? Pour celles qui sont valides, en donner une preuve, pour celles qui ne sont pas valides, construire une structure dans laquelle la formule est fausse.
2. Quelles sont parmi ces formules celles qui sont satisfiables ? Pour celles qui sont satisfiables, construire une structure dans laquelle cette formule est vraie.

**Exercice 4 (3+4=7 points)**

On considère la formule  $F = \exists x p(x) \Rightarrow \forall x p(x)$ .

1. Expliquer pourquoi la preuve de  $F$  ci-dessous n'est pas correcte.



2. Existe-t-il une preuve correcte de la formule  $F$  ? Si oui, écrire cette preuve, sinon déterminer une structure  $\mathbf{M}$  dans laquelle la formule  $F$  est fausse.

**Exercice 5 (8+8=16 points)**

En utilisant les règles de la déduction naturelle, prouver les deux formules suivantes :

1.  $((A \wedge B) \Rightarrow C) \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
2.  $(\forall x \neg p(x)) \Rightarrow (\neg \exists x p(x))$

**Exercice 6 ((4+4+4)+4=16 points)**

Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  un ensemble de symboles de fonction avec  $\mathcal{F}_0 = \{k_0, k_1\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \{c\}$ , et  $\mathcal{F}_2 = \{f\}$  (c-à-d  $k_0$  et  $k_1$  sont des symboles de constante,  $c$  est un symbole de fonction d'arité 1 et  $f$  est un symbole de fonction d'arité 2).

1. On considère la structure  $\mathbf{M}$  dont le domaine est l'ensemble des booléens  $|\mathbf{M}| = \{0, 1\} = \mathbb{B}$  telle que :

$$\begin{array}{lll} k_1^{\mathbf{M}} = 1 & c^{\mathbf{M}} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B} & f^{\mathbf{M}} : (\mathbb{B} \times \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B} \\ k_0^{\mathbf{M}} = 0 & c^{\mathbf{M}}(x) = \bar{x} & f^{\mathbf{M}}(x, y) = x + y \end{array}$$

- (a) Calculer  $[c(c(k_0))]_v^{\mathbf{M}}$  et  $[f(k_1, c(k_1))]_v^{\mathbf{M}}$ .
  - (b) Soit  $t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$ , calculer  $[c(c(t))]_v^{\mathbf{M}}$  en fonction de  $[t]_v^{\mathbf{M}}$ .
  - (c) Soit  $t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$ , calculer  $[f(t, c(t))]_v^{\mathbf{M}}$ .
2. Trouver une structure  $\mathbf{M}'$  telle que  $\forall t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F}) [f(t, c(t))]_v^{\mathbf{M}'} = 0$ .

## Corrigé de l'examen 1ère session du 08/01/2016

### ► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1.

- (1).  $F_1 \models F_2$  si, et seulement si, pour toute interprétation  $\mathbf{I}$ , si  $[F_1]^{\mathbf{I}} = 1$ , alors  $[F_2]^{\mathbf{I}} = 1$ .  
(2). (a). Oui car l'ensemble des interprétations  $\mathbf{I}$  telles que  $[p \wedge \neg p]^{\mathbf{I}} = 1$  est vide. (a). Non car  $p \vee \neg p$  est une formule valide, et est donc satisfaite par toutes les interprétations, alors que  $p \wedge \neg p$  n'est satisfaite par aucune interprétation.  
(3). (a). Construction de l'expression booléenne  $[F]^{\mathbf{I}}$  :

$$\begin{aligned} [F]^{\mathbf{I}} &= [\neg p \vee q]^{\mathbf{I}} \cdot [\neg(\neg q \Rightarrow \neg p)]^{\mathbf{I}} = ([\neg p]^{\mathbf{I}} + [q]^{\mathbf{I}}) \cdot [\neg q \Rightarrow \neg p]^{\mathbf{I}} = ([p]^{\mathbf{I}} + [q]^{\mathbf{I}}) \cdot [\neg q]^{\mathbf{I}} + [\neg p]^{\mathbf{I}} \\ &= ([p]^{\mathbf{I}} + [q]^{\mathbf{I}}) \cdot [\overline{q}]^{\mathbf{I}} + [\overline{p}]^{\mathbf{I}} = (\overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q)) \cdot \overline{\mathbf{I}(q)} + \overline{\mathbf{I}(p)} \end{aligned}$$

Simplification de l'expression booléenne  $[F]^{\mathbf{I}}$  :

$$\begin{aligned} &(\overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q)) \cdot \overline{\mathbf{I}(q)} + \overline{\mathbf{I}(p)} \\ \equiv &(\overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q)) \cdot \overline{\mathbf{I}(q)} + \overline{\mathbf{I}(p)} & (E1.2) \\ \equiv &(\overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q)) \cdot (\overline{\mathbf{I}(q)} \cdot \overline{\mathbf{I}(p)}) & (E4.4) \\ \equiv &(\overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q)) \cdot (\overline{\mathbf{I}(q)} \cdot \mathbf{I}(p)) & (E1.2) \\ \equiv &(\overline{\mathbf{I}(q)} \cdot \mathbf{I}(p)) \cdot (\overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q)) & (E2.1) \\ \equiv &\overline{\mathbf{I}(q)} \cdot \mathbf{I}(p) \cdot \overline{\mathbf{I}(p)} + \overline{\mathbf{I}(q)} \cdot \mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q) & (E4.1) \\ \equiv &\overline{\mathbf{I}(q)} \cdot 0 + \overline{\mathbf{I}(q)} \cdot \mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q) & (E1.3) \\ \equiv &0 + \overline{\mathbf{I}(q)} \cdot \mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q) & (E2.7) \\ \equiv &\overline{\mathbf{I}(q)} \cdot \mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q) & (E3.2) \\ \equiv &\mathbf{I}(q) \cdot \overline{\mathbf{I}(q)} \cdot \mathbf{I}(p) & (E2.1) \text{ et } (E2.4) \\ \equiv &0 \cdot \mathbf{I}(p) & (E1.3) \\ \equiv &0 & (E2.3) \end{aligned}$$

(b et c). La formule  $F$  n'est pas satisfiable puisqu'il n'existe pas d'interprétation  $\mathbf{I}$  telle que  $[F]^{\mathbf{I}} = 1$ . La formule  $F$  n'est donc pas valide. La formule  $\neg F$  est satisfiable car pour toute interprétation  $\mathbf{I}$ , on a  $[\neg F]^{\mathbf{I}} = \overline{[F]^{\mathbf{I}}} = \overline{0} = 1$ . La formule  $\neg F$  est donc de plus une formule valide.

### ► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2.

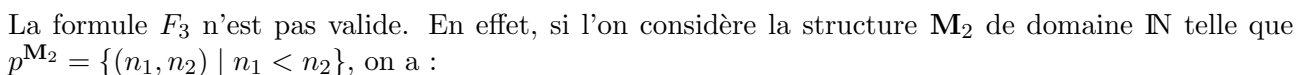
- (1) Eva déclare  $\neg s \Rightarrow r$ , Raoul déclare  $e \Rightarrow r$  et Scoubidou déclare  $\neg e \Rightarrow r$ .  
(2) On considère la table de vérité :

$\mathbf{I}(e)$	$\mathbf{I}(r)$	$\mathbf{I}(s)$	$[\neg s \Rightarrow r]^{\mathbf{I}}$	$[e \Rightarrow r]^{\mathbf{I}}$	$[\neg e \Rightarrow r]^{\mathbf{I}}$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1 $\mathbf{I}_1$
0	1	1	1	1	1 $\mathbf{I}_2$
1	0	0	0	0	1 $\mathbf{I}'$
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1 $\mathbf{I}_3$
1	1	1	1	1	1 $\mathbf{I}_4$

(3) Si on considère l'interprétation  $\mathbf{I}'$ , on en déduit que Eva et Raoul ont menti et Scoubidou a dit la vérité.

(1). La formule  $F_1$  n'est pas valide. En effet, si l'on considère la structure  $\mathbf{M}_1$  de domaine  $\mathbb{N}$  telle que  $p^{\mathbf{M}_1} = \{n \mid n \text{ est pair}\}$  et  $q^{\mathbf{M}_1} = \{n \mid n \text{ est impair}\}$ , on a :

La formule  $F_2$  est valide et se prouve comme suit.



(2). La formule  $F_1$  est satisfiable. Par exemple, si l'on considère la structure  $\mathbf{M}_3$  de domaine  $\mathbb{N}$  telle

que  $p^{\mathbf{M}_3} = q^{\mathbf{M}_3} = \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} [F_1]_v^{\mathbf{M}_3} &= \overline{[\forall x (p(x) \vee q(x))]_v^{\mathbf{M}_3}} + [((\forall x p(x)) \vee (\forall x q(x)))_v^{\mathbf{M}_3}] \\ &= \overline{[\forall x (p(x) \vee q(x))]_v^{\mathbf{M}_3}} + [\forall x p(x)]_v^{\mathbf{M}_3} + [\forall x q(x)]_v^{\mathbf{M}_3} \\ &= \bar{1} + 1 + 1 = 0 + 1 + 1 = 1 \end{aligned}$$

La formule  $F_2$  est valide et est donc vraie dans toutes les structures (la structure  $\mathbf{M}_3$  par exemple). Cette formule est donc satisfiable.

La formule  $F_3$  est satisfiable. Par exemple, si l'on considère la structure  $\mathbf{M}_4$  de domaine  $|\mathbf{M}_4| = \{1\}$  telle que  $p^{\mathbf{M}_4} = \{(1, 1)\}$ , on a :

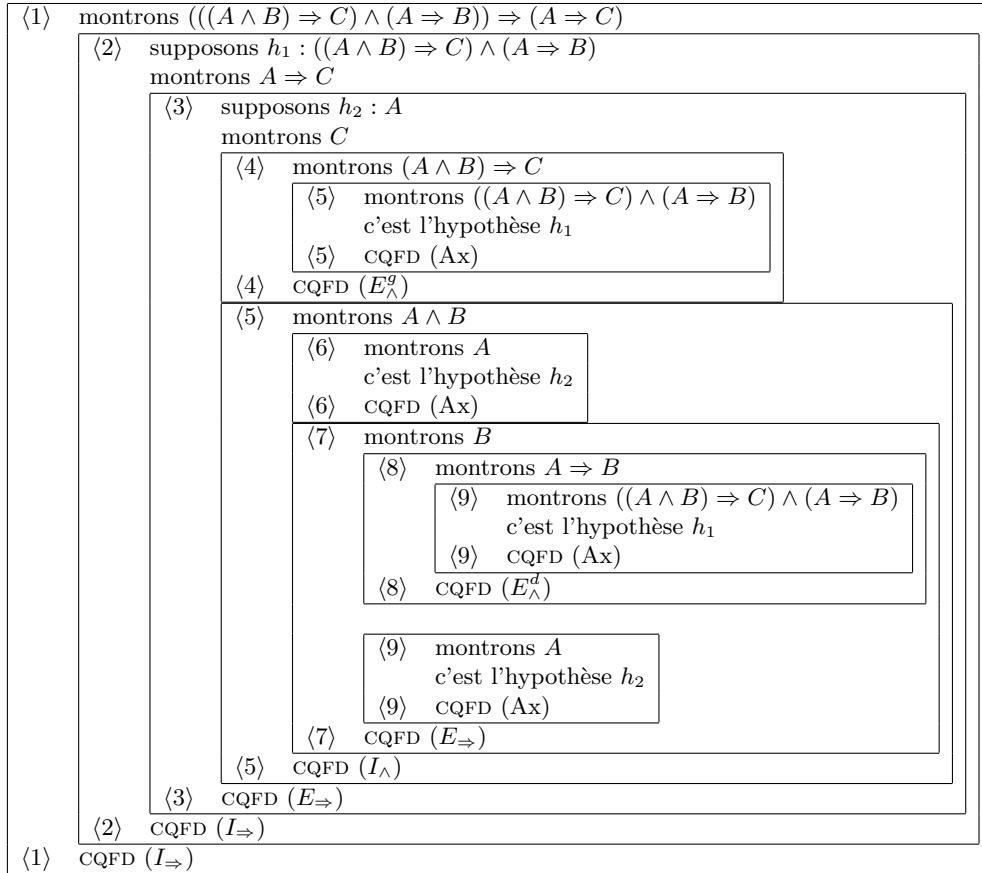
$$[F_3]_v^{\mathbf{M}_1} = \overline{[\forall x \exists y p(x, y)]_v^{\mathbf{M}_1}} + [\exists y \forall x p(x, y)]_v^{\mathbf{M}_1} = \bar{1} + 1 = 0 + 1 = 1$$

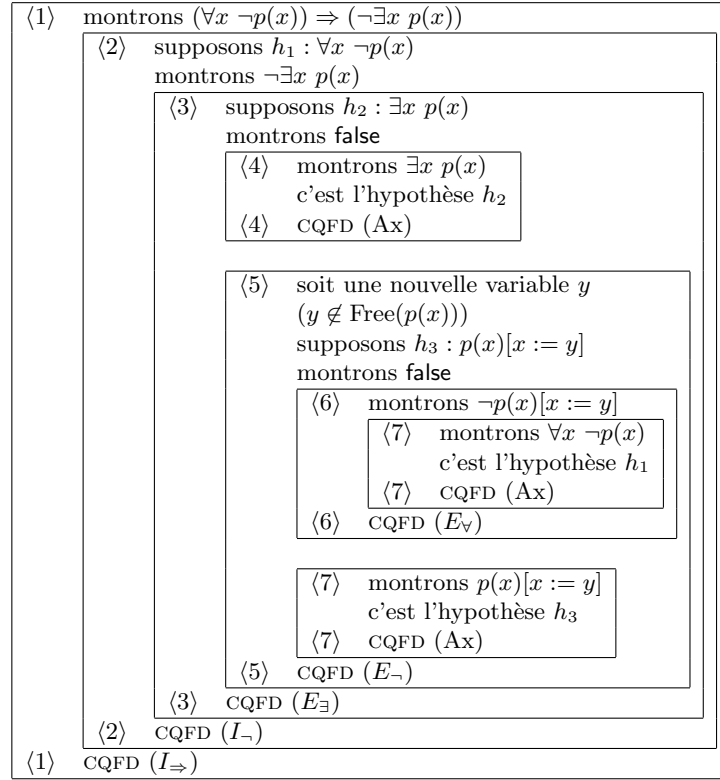
► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4.

(1). La règle  $(E_{\exists})$  utilisée dans l'étape  $\langle 3 \rangle$  n'est pas appliquée correctement : dans la partie  $\langle 5 \rangle$ , la variable utilisée ne doit pas admettre d'occurrence libre dans les formules en hypothèse et dans la formule à prouver, or la variable utilisée est  $y$  et est libre dans la formule  $p(y)$  à prouver.

(2). La formule  $F$  n'est pas prouvable puisqu'elle n'est pas valide. En effet, par exemple, si l'on considère la structure  $\mathbf{M}$  de domaine  $\mathbb{N}$  telle que  $p^{\mathbf{M}} = \{n \mid n \text{ est pair}\}$ , pour toute valuation, d'une part, on a  $[\exists x p(x)]_v^{\mathbf{M}} = 1$  (on a par exemple  $[p(x)]_{v[x \leftarrow 2]}^{\mathbf{M}} = 1$  puisque  $2 \in p^{\mathbf{M}}$ ), et d'autre part, on a  $[\forall x p(x)]_v^{\mathbf{M}} = 0$  (on a par exemple  $[p(x)]_{v[x \leftarrow 3]}^{\mathbf{M}} = 0$  puisque  $3 \notin p^{\mathbf{M}}$ ). Aussi, il vient  $[F]_v^I = \overline{[\exists x p(x)]_v^I} + [\forall x p(x)]_v^I = \bar{1} + 0 = 0 + 0 = 0$ .

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5.





► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6.

(1.a).

$$[c(c(k_0))]_v^{\mathbf{M}} = c^{\mathbf{M}}([c(k_0)]_v^{\mathbf{M}}) = c^{\mathbf{M}}(c^{\mathbf{M}}([k_0]_v^{\mathbf{M}})) = c^{\mathbf{M}}(c^{\mathbf{M}}(0)) = c^{\mathbf{M}}(1) = 0$$

$$[f(k_1, c(k_1))]_v^{\mathbf{M}} = f^{\mathbf{M}}([k_1]_v^{\mathbf{M}}, [c(k_1)]_v^{\mathbf{M}}) = f^{\mathbf{M}}(1, c^{\mathbf{M}}(1)) = f^{\mathbf{M}}(1, 0) = 1 + 0 = 1$$

(1.b).  $[c(c(t))]_v^{\mathbf{M}} = c^{\mathbf{M}}([c(t)]_v^{\mathbf{M}}) = c^{\mathbf{M}}(c^{\mathbf{M}}([t]_v^{\mathbf{M}})) = \overline{[t]_v^{\mathbf{M}}} = [t]_v^{\mathbf{M}}$

(1.c).  $[f(t, c(t))]_v^{\mathbf{M}} = f^{\mathbf{M}}([t]_v^{\mathbf{M}}, [c(t)]_v^{\mathbf{M}}) = f^{\mathbf{M}}([t]_v^{\mathbf{M}}, c^{\mathbf{M}}([t]_v^{\mathbf{M}})) = f^{\mathbf{M}}([t]_v^{\mathbf{M}}, \overline{[t]_v^{\mathbf{M}}}) = [t]_v^{\mathbf{M}} + \overline{[t]_v^{\mathbf{M}}} = 1$

(2). Il suffit de considérer la structure  $\mathbf{M}'$  dont le domaine est l'ensemble des booléens  $|\mathbf{M}'| = \{0, 1\} = \mathbb{B}$  telle que :

$$\begin{array}{lll} k_1^{\mathbf{M}'} = 1 & c^{\mathbf{M}'} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B} & f^{\mathbf{M}'} : (\mathbb{B} \times \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B} \\ k_0^{\mathbf{M}'} = 0 & c^{\mathbf{M}'}(x) = \bar{x} & f^{\mathbf{M}'}(x, y) = x.y \end{array}$$

En effet, on a alors :

$$[f(t, c(t))]_v^{\mathbf{M}'} = f^{\mathbf{M}'}([t]_v^{\mathbf{M}'}, [c(t)]_v^{\mathbf{M}'}) = f^{\mathbf{M}'}([t]_v^{\mathbf{M}'}, c^{\mathbf{M}'}([t]_v^{\mathbf{M}'})) = f^{\mathbf{M}'}([t]_v^{\mathbf{M}'}, \overline{[t]_v^{\mathbf{M}'}}) = [t]_v^{\mathbf{M}'} \cdot \overline{[t]_v^{\mathbf{M}'}} = 0$$