

Examen 1ère session du 11/01/2018**Durée 2h**

Téléphones, calculettes et ordinateurs interdits. Le seul document autorisé est le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Dédution Naturelle. Inscrire votre numéro d'anonymat sur votre copie. Conserver l'étiquette portant votre numéro d'anonymat, elle sera demandée pour toute consultation de copie. La note (entre 0 et 70) est le minimum entre 70 et la somme des points obtenus (entre 0 et 77).

Exercice 1 (1+1+2+2+2+(2+2+2)=14 points)

A partir de l'ensemble de symboles de variable $X = \{x, y, z\}$ on définit la formule $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ci-dessous :

$$\forall x (p(x, y, z) \Rightarrow \exists y (q(f(x, y), z) \vee \forall z (q(f(x, z), f(y, a))))))$$

1. Quels sont les symboles de fonction et de constante apparaissant dans cette formule ?
2. Quels sont les symboles de prédicat apparaissant dans cette formule ?
3. Déterminer l'ensemble $\text{Free}(F)$.
4. Déterminer une clôture universelle de F .
5. Quelle formule close doit être valide pour que la formule F soit valide ?
6. Calculer : (a) $F[x := f(y, a)]$ (b) $F[y := f(x, z)]$ (c) $F[z := f(y, a)]$

Exercice 2 (2+4+(2+4+3+4)+8=27 points)

1. Donner la définition (mathématique) de deux formules F_1 et F_2 de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ équivalentes ($F_1 \models F_2$).
2. Soit F_1 et F_2 deux formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$. Montrer que si F_1 est valide alors $F_1 \wedge F_2 \models F_2$.
3. Soit $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ la formule $(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$ où A et B sont deux formules atomiques.
 - (a) Etant donnée une structure \mathbf{M} , calculer l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$ et $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)$ (sans effectuer de simplification).
 - (b) En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ est équivalente à l'expression booléenne $(\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)).(\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A))$ (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
 - (c) Peut-on en déduire que $F \models (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$? Justifier.
 - (d) En déduire que F est une formule valide si et seulement si $A \models B$ (justifier avec une démonstration).
4. En utilisant les règles de la déduction naturelle, prouver la formule :

$$((A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Exercice 3 (8+12=20 points)

On considère les deux formules :

$$F_1 = (\forall y \exists x p(x, y)) \Rightarrow \exists x p(x, x) \quad F_2 = (\exists x (\neg p(x) \vee q(a))) \Rightarrow ((\forall x p(x)) \Rightarrow q(a))$$

Pour chacune de ces deux formules, déterminer s'il s'agit d'une formule valide.

- S'il s'agit d'une formule valide, prouver cette formule en utilisant les règles de la déduction naturelle.
- S'il ne s'agit pas d'une formule valide :
 - définir une structure dans laquelle la formule est fausse en justifiant pourquoi elle est fausse,
 - la formule est-elle satisfiable ? si oui définir une structure dans laquelle la formule est vraie en justifiant pourquoi elle est vraie.

Exercice 4 (2+6+3+5=16 points)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$ un ensemble contenant un unique symbole de fonction f d'arité 1 et X un ensemble de symboles de variable.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ pour l'ensemble \mathcal{F} .
2. Etant donné un entier n et un symbole de variable x , on définit le terme $f^n(x)$ comme suit :

$$f^n(x) = \begin{cases} x & \text{si } n = 0 \\ f(f^k(x)) & \text{si } n = k + 1 \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{T}(X, \mathcal{F}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f^n(x) \mid x \in X\}$.

3. On considère l'ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{eq\}$ contenant l'unique symbole de prédicat eq d'arité 2 et la formule $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ci-dessous :

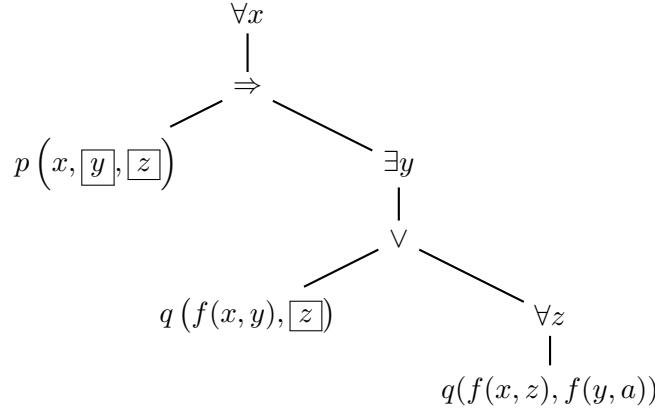
$$\forall x_1 \forall x_2 (eq(f(x_1), f(x_2)) \Rightarrow eq(x_1, x_2))$$

- (a) Définir une structure \mathbf{M} telle que $[F]_v^{\mathbf{M}} = 0$ quelle que soit la valuation v (justifier).
- (b) Déterminer toutes les structures \mathbf{M} de domaine $|\mathbf{M}| = \{a, b\}$ telles que $eq^{\mathbf{M}} = \{(a, a), (b, b)\}$ et $[F]_v^{\mathbf{M}} = 1$ pour toute valuation v (justifier).

Corrigé de l'examen 1ère session du 11/01/2018

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1.

L'arbre de syntaxe abstraite de la formule F est :



1. Les symboles de fonction apparaissant dans F sont f et a (constante).
2. Les symboles de prédicat apparaissant dans F sont p et q .
3. $\text{Free}(F) = \{y, z\}$ (les occurrences libres de variable sont encadrées sur l'arbre de syntaxe abstraite).
4. Clôture universelle de F : $\forall y \forall z \forall x (p(x, y, z) \Rightarrow \exists y (q(f(x, y), z) \vee \forall z (q(f(x, z), f(y, a))))$
5. Pour que F soit valide il faut que sa clôture universelle $\forall y \forall z F$ soit valide.
6. a. $F[x := f(y, a)] = F$ car $x \notin \text{Free}(F)$
 b. Pour calculer $F[y := f(x, z)]$ on renomme en w_1 les occurrences liées de x dans F (car x apparaît dans le terme $f(x, z)$) et en w_2 l'occurrence liée de z dans F (car z apparaît dans le terme $f(x, z)$), puis on effectue la substitution sur l'unique occurrence libre de y dans F :

$$F[y := f(x, z)] = \forall w_1 \left(p \left(w_1, \boxed{f(x, z)}, z \right) \Rightarrow \exists y (q(f(w_1, y), z) \vee \forall w_2 (q(f(w_1, w_2), f(y, a)))) \right)$$

Remarque : ici le renommage de l'occurrence liée de z en w_2 n'était pas obligatoire puisque la variable z introduite lors de la substitution n'est pas dans la portée de la quantification $\forall z$ dans la formule $F[y := f(x, z)]$.

- c. Pour calculer $F[z := f(y, a)]$ on renomme en w les occurrences liées de y dans F (car y apparaît dans le terme $f(y, a)$) puis on effectue la substitution sur les deux occurrences libres de z dans F :

$$F[z := f(y, a)] = \forall x \left(p \left(x, y, \boxed{f(y, a)} \right) \Rightarrow \exists w \left(q \left(f(x, w), \boxed{f(y, a)} \right) \vee \forall z (q(f(x, z), f(w, a))) \right) \right)$$

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2.

1. $F_1 \models F_2$ si et seulement si pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^\mathbf{M} = [F_2]^\mathbf{M}$.
2. Supposons F_1 valide et montrons $F_1 \wedge F_2 \models F_2$. Par définition, pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^\mathbf{M} = 1$ et en effectuant un produit avec $[F_2]^\mathbf{M}$ des deux côtés de l'égalité on obtient $[F_1]^\mathbf{M} \cdot [F_2]^\mathbf{M} = 1 \cdot [F_2]^\mathbf{M}$ et puisque $1 \cdot [F_2]^\mathbf{M}$ se simplifie en $[F_2]^\mathbf{M}$ (équivalence E2.2) et il vient $[F_1]^\mathbf{M} \cdot [F_2]^\mathbf{M} = [F_2]^\mathbf{M}$. On a donc bien $F_1 \wedge F_2 \models F_2$ car $[F_1 \wedge F_2]^\mathbf{M} = [F_1]^\mathbf{M} \cdot [F_2]^\mathbf{M} = [F_2]^\mathbf{M}$.

3. a.

$$\begin{aligned} [(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)]^\mathbf{M} &= \overline{[A \vee B]^\mathbf{M}} + [A \wedge B]^\mathbf{M} = \overline{[A]^\mathbf{M} + [B]^\mathbf{M}} + ([A]^\mathbf{M} \cdot [B]^\mathbf{M}) \\ &= \overline{\mathbf{I}_\mathbf{M}(A) + \mathbf{I}_\mathbf{M}(B)} + (\mathbf{I}_\mathbf{M}(A) \cdot \mathbf{I}_\mathbf{M}(B)) \end{aligned}$$

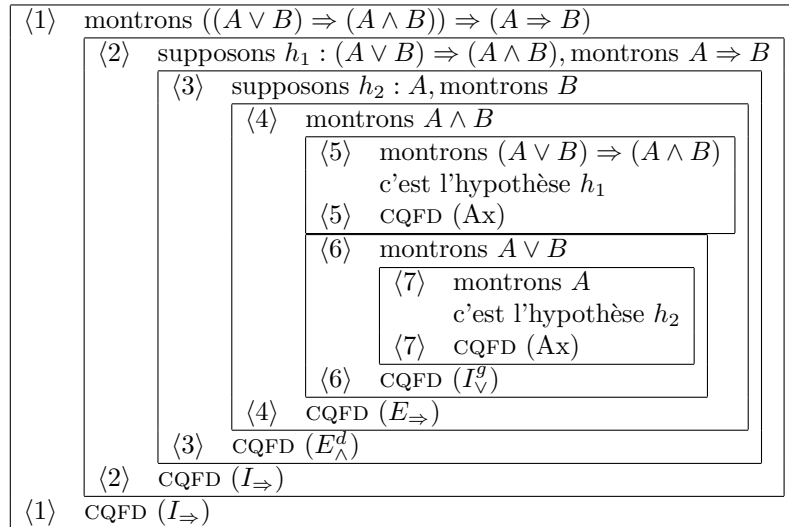
$$\begin{aligned}
\text{b.} \quad & \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)} + (\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)) \stackrel{(E4.4)}{=} (\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} \cdot \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)}) + (\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)) \\
& \stackrel{(E4.2)}{=} ((\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} \cdot \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)}) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)) \cdot ((\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} \cdot \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)}) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)) \\
& \stackrel{(E3.1(\times 2))}{=} (\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + (\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} \cdot \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)})) \cdot (\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B) + (\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} \cdot \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)})) \\
& \stackrel{(E4.2(\times 2))}{=} ((\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)}) \cdot (\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)})) \cdot ((\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B) + \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)}) \cdot (\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B) + \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)})) \\
& \stackrel{(E1.4(\times 2))}{=} (1 \cdot (\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)})) \cdot ((\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B) + \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)}) \cdot 1) \\
& \stackrel{(E2.2+E2.6))}{=} (\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)}) \cdot (\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B) + \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)}) \\
& \stackrel{(E3.1(\times 2))}{=} (\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)) \cdot (\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)) \stackrel{(E2.1)}{=} (\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)) \cdot (\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A))
\end{aligned}$$

c. On a $F \models (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ car :

$$\begin{aligned}
[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]^{\mathbf{M}} &= [A \Rightarrow B]^{\mathbf{M}} \cdot [B \Rightarrow A]^{\mathbf{M}} = (\overline{[A]^{\mathbf{M}}} + [B]^{\mathbf{M}}) \cdot (\overline{[B]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}}) \\
&= (\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)) \cdot (\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)) \\
&\equiv \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)} + (\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)) \quad (\text{question 3.b.}) \\
&= [F]^{\mathbf{M}} \quad (\text{question 3.a.})
\end{aligned}$$

- d. F est une formule valide
- ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F]^{\mathbf{M}} = 1$ (par définition)
 - ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[A \Rightarrow B]^{\mathbf{M}} \cdot [B \Rightarrow A]^{\mathbf{M}} = 1$ (question 3.c.)
 - ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[A \Rightarrow B]^{\mathbf{M}} = 1$ et $[B \Rightarrow A]^{\mathbf{M}} = 1$ (par définition du produit)
 - ssi $A \Rightarrow B$ est valide et $B \Rightarrow A$ est valide (par définition)
 - ssi $A \models B$ et $B \models A$ (résultat vu en cours)
 - ssi $A \models B$ (résultat vu en cours)

4.



► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3.

La formule F_1 n'est pas valide puisque si l'on considère la structure \mathbf{M}_1 de domaine $|\mathbf{M}_1| = \mathbb{N}$ telle que $p^{\mathbf{M}_1} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 > n_2\}$ on a :

$$[F_1]_v^{\mathbf{M}_1} = [\forall y \exists x p(x, y)]_v^{\mathbf{M}_1} + [\exists z p(z, z)]_v^{\mathbf{M}_1} = 0 + 0 = 0$$

En effet, d'une part $[\forall y \exists x p(x, y)]_v^{\mathbf{M}_1} = 0$ car :

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4.

1. Définition inductive de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$:

- pour tout $x \in X$, $x \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$
- si $t \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$, alors $f(t) \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$

2. On montre la double inclusion.

(\subseteq) Pour montrer $\mathcal{T}(X, \mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f^n(x) \mid x \in X\}$, nous montrons $t \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f^n(x) \mid x \in X\}$ par induction sur t . Si $t = x \in X$ alors on a $t = f^0(x) = x$ ce qui permet de conclure, sinon, $t = f(t')$ et, par hypothèse d'induction, $t' \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f^n(x) \mid x \in X\}$. Il existe donc un entier p tel $t' = f^p(x)$, et on obtient alors $t = f(t') = f(f^p(x)) = f^{p+1}(x)$ ce qui permet de conclure.

(\supseteq) Pour montrer $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f^n(x) \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$, il suffit de montrer que pour tout entier p et tout symbole de variable x , $f^p(x) \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$. On procède par récurrence sur p . Si $p = 0$, alors $f^0(x) = x \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$, puisque x est un symbole de variable. Supposons que $f^p(x) \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$, et montrons $f^{p+1}(x) \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$. On a $f^{p+1}(x) = f(f^p(x))$ et puisque $f^p(x) \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ et f est un symbole de fonction d'arité 1, on a bien $f^{p+1}(x) \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.

3.a. Si l'on considère la structure \mathbf{M} dont le domaine est l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs et telle que $eq^{\mathbf{M}} = \{(k, k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$, alors la formule F exprime que la fonction f est une fonction injective sur \mathbb{Z} . En définissant $f^{\mathbf{M}}$ par la fonction $f^{\mathbf{M}}(k) = k^2$ on a alors $[F]_v^{\mathbf{M}} = 0$ car $f^{\mathbf{M}}$ n'est pas une fonction injective (par exemple on a $f^{\mathbf{M}}(2) = f^{\mathbf{M}}(-2)$ alors que $2 \neq -2$, c-à-d $(2, -2) \notin eq^{\mathbf{M}}$).

b. Si l'on considère des structures \mathbf{M} telles que $|\mathbf{M}| = \{a, b\}$ et $eq^{\mathbf{M}} = \{(a, a), (b, b)\}$, alors la formule F exprime que $f^{\mathbf{M}}$ est une fonction injective de $\{a, b\}$ vers $\{a, b\}$. Il existe uniquement deux fonctions injectives de $\{a, b\}$ dans $\{a, b\}$ et il existe donc uniquement deux structures de domaine $|\mathbf{M}| = \{a, b\}$ telles que $eq^{\mathbf{M}} = \{(a, a), (b, b)\}$ et $[F]_v^{\mathbf{M}} = 1$:

\mathbf{M}_1	\mathbf{M}_2
$f^{\mathbf{M}_1}(a) = a$	$f^{\mathbf{M}_2}(a) = b$
$f^{\mathbf{M}_1}(b) = b$	$f^{\mathbf{M}_2}(b) = a$