

Examen 2ème session du 10/06/2016
Durée 2h

Le seul document autorisé est le formulaire de règles de la Dédution Naturelle.

Téléphones, Calculettes et Ordinateurs interdits.

Inscrire votre numéro d'anonymat sur votre copie.

La note (entre 0 et 80) est le minimum entre 80 et la somme des points obtenus (entre 0 et 87).

Exercice 1 (3+(1+1)+(4+3+3)= 15 points)

1. Etant données deux formules de la logique des propositions F_1 et F_2 , donner la définition (mathématique) de $F_1 \models F_2$.
2. Soit p un symbole de proposition.
 - (a) A-t-on $p \wedge \neg p \models \neg p$? (Justifier.)
 - (b) A-t-on $p \Rightarrow \neg p \models \neg p$? (Justifier.)
3. On considère la formule $F = (p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)$.
 - (a) Etant donnée une interprétation \mathbf{I} , calculer $[F]^\mathbf{I}$.
 - (b) La formule F est-elle satisfiable ? La formule $\neg F$ est-elle satisfiable ? (Justifier.)
 - (c) La formule F est-elle valide ? La formule $\neg F$ est-elle valide ? (Justifier.)

Exercice 2 (3+3+3=9 points)

Conrad, Paul et Ursule sont tous les trois accusés d'un crime et ils font les déclarations suivantes :

Conrad : “*Au moins deux d'entre nous sont coupables.*”

Paul : “*Si je suis coupable, alors Ursule est aussi coupable et Conrad est innocent.*”

Ursule : “*Si Conrad est coupable alors Paul et moi sommes innocents.*”

1. A l'aide des trois propositions :

p : Conrad est coupable q : Paul est coupable r : Ursule est coupable

formaliser les déclarations de Conrad, Paul et Ursule.

2. On suppose que tous les trois disent la vérité. Que peut-on dire sur la culpabilité de Conrad, de Paul, de Ursule ? (justifier vos réponses en utilisant la notion de conséquence sémantique)
3. L'enquête montre que Conrad et Ursule sont coupables et que Paul est innocent. Déterminer qui a menti et qui a dit la vérité.

Exercice 3 (12+12=24 points)

On considère les trois formules ci-dessous.

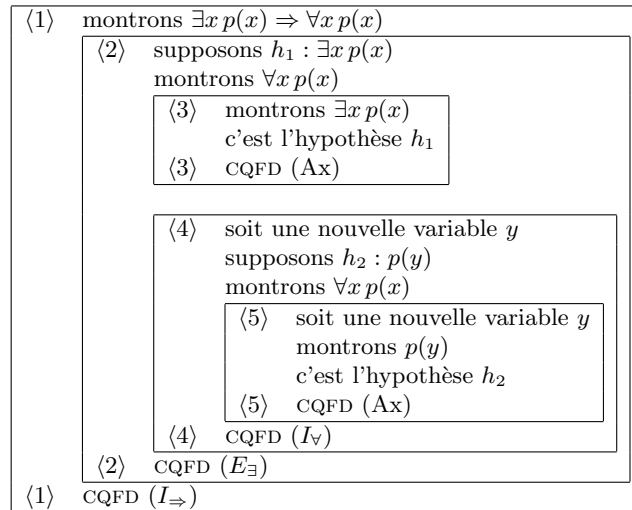
- (F_1) $\exists x (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow ((\exists x p(x)) \wedge (\exists x q(x)))$
(F_2) $((\exists x p(x)) \wedge (\exists x q(x))) \Rightarrow \exists x (p(x) \wedge q(x))$
(F_3) $\forall y \exists x p(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y p(x, y)$

1. Quelles sont parmi ces formules celles qui sont valides ? Pour celles qui sont valides, en donner une preuve, pour celles qui ne sont pas valides, construire une structure dans laquelle la formule est fausse.
2. Quelles sont parmi ces formules celles qui sont satisfiables ? Pour celles qui sont satisfiables, construire une structure dans laquelle cette formule est vraie.

Exercise 4 (3+4=7 points)

On considère la formule $F = \exists x p(x) \Rightarrow \forall x p(x)$.

1. Expliquer pourquoi la preuve de F ci-dessous n'est pas correcte.



2. Existe-t-il une preuve correcte de la formule F ? Si oui, écrire cette preuve, sinon déterminer une structure \mathbf{M} dans laquelle la formule F est fausse.

Exercise 5 (8+8=16 points)

En utilisant les règles de la déduction naturelle, prouver les deux formules suivantes :

1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
2. $\neg(\exists x p(x)) \Rightarrow (\forall x \neg p(x))$

Exercice 6 ((4+4+4)+4=16 points)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{k_0, k_1\}$, $\mathcal{F}_1 = \{c\}$, et $\mathcal{F}_2 = \{f\}$ (c-à-d k_0 et k_1 sont des symboles de constante, c est un symbole de fonction d'arité 1 et f est un symbole de fonction d'arité 2).

1. On considère la structure \mathbf{M} dont le domaine est l'ensemble des booléens $|\mathbf{M}| = \{0, 1\} = \mathbb{B}$ telle que :

$$\begin{array}{lll} k_1^{\mathbf{M}} = 1 & c^{\mathbf{M}} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B} & f^{\mathbf{M}} : (\mathbb{B} \times \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B} \\ k_0^{\mathbf{M}} = 0 & c^{\mathbf{M}}(x) = \overline{x} & f^{\mathbf{M}}(x, y) = x.y \end{array}$$

- Calculer $[c(c(k_1))]_v^{\mathbf{M}}$ et $[f(k_0, c(k_0))]_v^{\mathbf{M}}$.
- Soit $t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$, calculer $[c(c(t))]_v^{\mathbf{M}}$ en fonction de $[t]_v^{\mathbf{M}}$.
- Soit $t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$, calculer $[f(t, c(t))]_v^{\mathbf{M}}$.

2. Trouver une structure \mathbf{M}' telle que $\forall t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F}) [f(t, c(t))]_v^{\mathbf{M}'} = 1$.

Corrigé de l'examen 2ème session du 10/06/2016

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1.

- (1) $F_1 \models F_2$ si et seulement si $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$ (ou de manière équivalente si et seulement si pour toute interprétation \mathbf{I} , $[F_1]^\mathbf{I} = [F_2]^\mathbf{I}$).
- (2) (a) Non car $[p \wedge \neg p]^\mathbf{I} = \mathbf{I}(p) \cdot \overline{\mathbf{I}(p)} = 0 \neq \overline{\mathbf{I}(p)} = [\neg p]^\mathbf{I}$.
- (b) Oui car $[p \Rightarrow \neg p]^\mathbf{I} = \overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(p) = \overline{\mathbf{I}(p)} = [\neg p]^\mathbf{I}$.
- (3) (a) Construction de l'expression booléenne $[F]^\mathbf{I}$:

$$[F]^\mathbf{I} = \overline{[p \wedge \neg q]^\mathbf{I}} + [\neg(p \Rightarrow q)]^\mathbf{I} = \overline{[p]^\mathbf{I} \cdot [\neg q]^\mathbf{I}} + \overline{[p \Rightarrow q]^\mathbf{I}} = \overline{[p]^\mathbf{I} \cdot [\neg q]^\mathbf{I}} + \overline{[p]^\mathbf{I}} + [q]^\mathbf{I} = \overline{\mathbf{I}(p) \cdot \overline{\mathbf{I}(q)}} + \overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q)$$

Simplification de l'expression booléenne $[F]^\mathbf{I}$:

$$\begin{aligned} & \overline{\mathbf{I}(p) \cdot \overline{\mathbf{I}(q)}} + \overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q) \\ \equiv & \overline{(\mathbf{I}(p) + \overline{\mathbf{I}(q)})} + \overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q) \quad (\text{E4.3}) \\ \equiv & \overline{(\mathbf{I}(p) + \mathbf{I}(q))} + \overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q) \quad (\text{E1.2}) \\ \equiv & 1 \quad (\text{E1.4}) \end{aligned}$$

(b et c) La formule F est satisfiable et puisqu'elle est satisfaite par toutes les interprétations, c'est une formule valide. La formule $\neg F$ n'est donc ni satisfiable (puisqu'il n'existe pas d'interprétation \mathbf{I} telle que $[\neg F]^\mathbf{I} = 1$) ni valide.

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2.

- (1) Conrad déclare $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$, Paul déclare $q \Rightarrow (r \wedge \neg p)$ et Ursule déclare $p \Rightarrow (\neg q \wedge \neg r)$.
- (2) On considère la table de vérité :

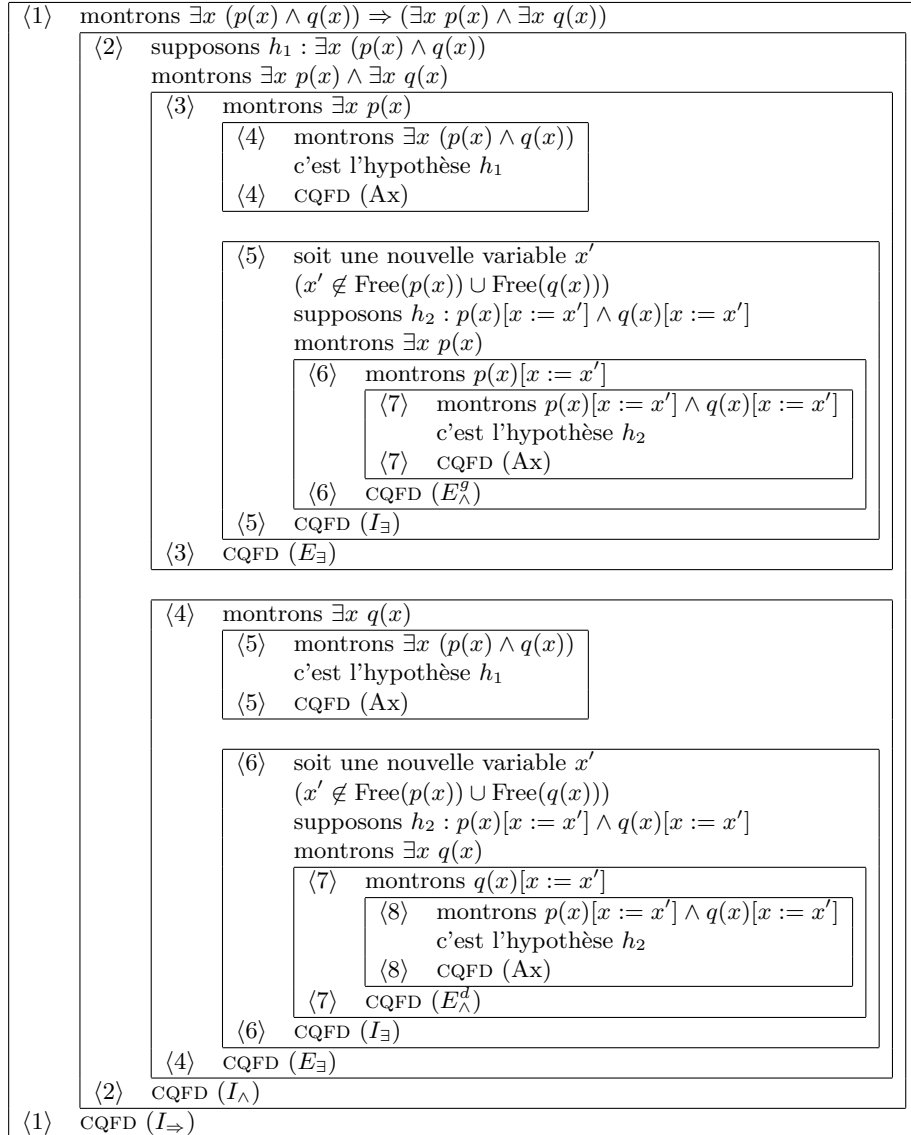
$\mathbf{I}(p)$	$\mathbf{I}(q)$	$\mathbf{I}(r)$	$[(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)]^\mathbf{I}$	$[q \Rightarrow (r \wedge \neg p)]^\mathbf{I}$	$[p \Rightarrow (\neg q \wedge \neg r)]^\mathbf{I}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

On constate alors qu'il existe seulement une interprétation \mathbf{I}_1 qui rend simultanément vraies les trois formules. Puisque $\mathbf{I}_1(p) = 0$ et $\mathbf{I}_1(q) = \mathbf{I}_1(r) = 1$, on en déduit que Conrad est innocent et Paul et Ursule sont coupables.

- (3) Si on considère l'interprétation \mathbf{I}_2 , on en déduit que Conrad et Paul disent la vérité et Ursule ment.

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3.

- (1) La formule F_1 est valide et se prouve comme suit.



La formule F_2 n'est pas valide. En effet, si l'on considère la structure \mathbf{M}_1 de domaine \mathbb{N} telle que $p^{\mathbf{M}_1} = \{n \mid n \text{ est pair}\}$ et $q^{\mathbf{M}_1} = \{n \mid n \text{ est impair}\}$, on a :

$$\begin{aligned} [F_2]_v^{\mathbf{M}_1} &= \overline{[\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)]_v^{\mathbf{M}_1}} + [\exists x (p(x) \wedge q(x))]_v^{\mathbf{M}_1} \\ &= [\exists x p(x)]_v^{\mathbf{M}_1} \cdot [\exists x q(x)]_v^{\mathbf{M}_1} + [\exists x (p(x) \wedge q(x))]_v^{\mathbf{M}_1} \\ &= \overline{1.1} + 0 = \overline{1} + 0 = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

La formule F_3 n'est pas valide. En effet, si l'on considère la structure \mathbf{M}_2 de domaine \mathbb{N} telle que $p^{\mathbf{M}_2} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 = n_2\}$, on a :

$$[F_3]_v^{\mathbf{M}_2} = \overline{[\forall y \exists x p(x, y)]_v^{\mathbf{M}_2}} + [\exists x \forall y p(x, y)]_v^{\mathbf{M}_2} = \bar{1} + 0 = 0 + 0 = 0$$

(2) La formule F_1 est valide et est donc vraie dans toutes les structures (la structure \mathbf{M}_2 par exemple). Cette formule est donc satisfiable.

La formule F_2 est satisfiable. Par exemple, si l'on considère la structure \mathbf{M}_3 de domaine \mathbb{N} telle que

$p^{\mathbf{M}_3} = q^{\mathbf{M}_3} = \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} [F_2]_v^{\mathbf{M}_3} &= \overline{[\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)]_v^{\mathbf{M}_3}} + [\exists x (p(x) \wedge q(x))]_v^{\mathbf{M}_3} \\ &= \overline{[\exists x p(x)]_v^{\mathbf{M}_3} \cdot [\exists x q(x)]_v^{\mathbf{M}_3}} + [\exists x (p(x) \wedge q(x))]_v^{\mathbf{M}_3} \\ &= \overline{1 \cdot 1} + 1 = \overline{1} + 1 = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

La formule F_3 est satisfiable. Par exemple, si l'on considère la structure \mathbf{M}_4 de domaine $|\mathbf{M}_4| = \{1\}$ telle que $p^{\mathbf{M}_4} = \{(1, 1)\}$, on a :

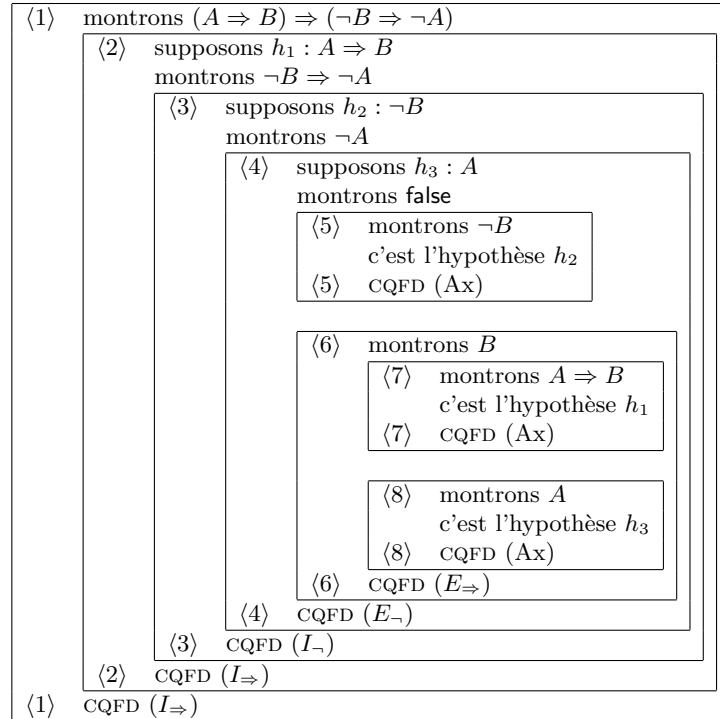
$$[F_3]_v^{\mathbf{M}_4} = \overline{[\forall y \exists x p(x, y)]_v^{\mathbf{M}_4}} + [\exists x \forall y p(x, y)]_v^{\mathbf{M}_4} = \overline{1} + 1 = 0 + 1 = 1$$

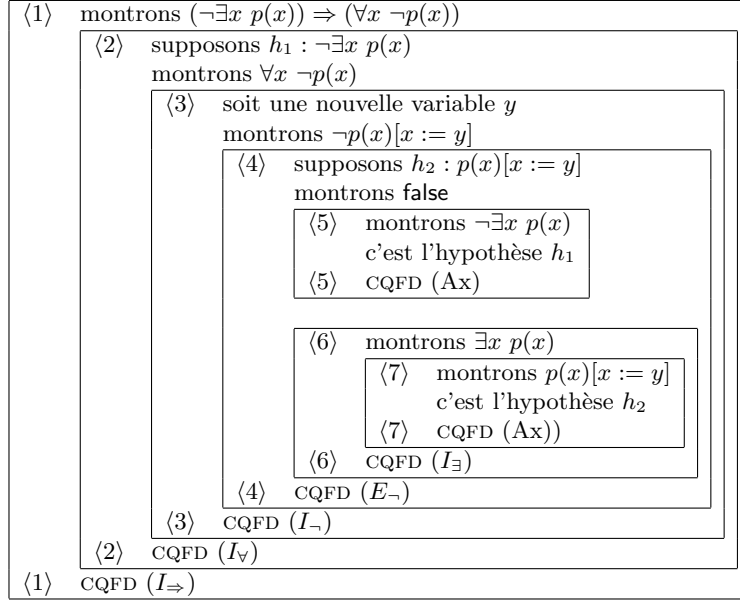
► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4.

(1) La règle (I_{\forall}) utilisée dans l'étape $\langle 4 \rangle$ n'est pas appliquée correctement : la variable utilisée ne doit pas admettre d'occurrence libre dans les formules en hypothèse. Or la variable utilisée y est libre dans l'hypothèse h_2 .

(2) La formule F n'est pas prouvable puisqu'elle n'est pas valide. En effet, par exemple, si l'on considère la structure \mathbf{M} de domaine \mathbb{N} telle que $p^{\mathbf{M}} = \{n \mid n \text{ est pair}\}$, pour toute valuation, d'une part, on a $[\exists x p(x)]_v^{\mathbf{M}} = 1$ (on a par exemple $[p(x)]_{v[x \leftarrow 2]}^{\mathbf{M}} = 1$ puisque $2 \in p^{\mathbf{M}}$), et d'autre part, on a $[\forall x p(x)]_v^{\mathbf{M}} = 0$ (on a par exemple $[p(x)]_{v[x \leftarrow 3]}^{\mathbf{M}} = 0$ puisque $3 \notin p^{\mathbf{M}}$). Aussi, il vient $[F]_v^I = \overline{[\exists x p(x)]_v^I} + [\forall x p(x)]_v^I = \overline{1} + 0 = 0 + 0 = 0$.

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5.





► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6.

(1.a)

$$\begin{aligned} [c(c(k_1))]_v^{\mathbf{M}} &= c^{\mathbf{M}}([c(k_1)]_v^{\mathbf{M}}) = c^{\mathbf{M}}(c^{\mathbf{M}}([k_1]_v^{\mathbf{M}})) = c^{\mathbf{M}}(c^{\mathbf{M}}(1)) = c^{\mathbf{M}}(0) = 1 \\ [f(k_0, c(k_0))]_v^{\mathbf{M}} &= f^{\mathbf{M}}([k_0]_v^{\mathbf{M}}, [c(k_0)]_v^{\mathbf{M}}) = f^{\mathbf{M}}(0, c^{\mathbf{M}}(0)) = f^{\mathbf{M}}(0, 1) = 0.1 = 0 \end{aligned}$$

(1.b) $[c(c(t))]_v^{\mathbf{M}} = c^{\mathbf{M}}([c(t)]_v^{\mathbf{M}}) = c^{\mathbf{M}}(c^{\mathbf{M}}([t]_v^{\mathbf{M}})) = \overline{[t]_v^{\mathbf{M}}} = [t]_v^{\mathbf{M}}$

(1.c) $[f(t, c(t))]_v^{\mathbf{M}} = f^{\mathbf{M}}([t]_v^{\mathbf{M}}, [c(t)]_v^{\mathbf{M}}) = f^{\mathbf{M}}([t]_v^{\mathbf{M}}, c^{\mathbf{M}}([t]_v^{\mathbf{M}})) = f^{\mathbf{M}}([t]_v^{\mathbf{M}}, \overline{[t]_v^{\mathbf{M}}}) = [t]_v^{\mathbf{M}} \cdot \overline{[t]_v^{\mathbf{M}}} = 0$

(2) Il suffit de considérer la structure \mathbf{M}' dont le domaine est l'ensemble des booléens $|\mathbf{M}'| = \{0, 1\} = \mathbb{B}$ telle que :

$$\begin{aligned} k_1^{\mathbf{M}'} &= 1 & c^{\mathbf{M}'} : \mathbb{B} &\rightarrow \mathbb{B} & f^{\mathbf{M}'} : (\mathbb{B} \times \mathbb{B}) &\rightarrow \mathbb{B} \\ k_0^{\mathbf{M}'} &= 0 & c^{\mathbf{M}'}(x) &= \bar{x} & f^{\mathbf{M}'}(x, y) &= x + y \end{aligned}$$

En effet, on a alors :

$$[f(t, c(t))]_v^{\mathbf{M}'} = f^{\mathbf{M}'}([t]_v^{\mathbf{M}'}, [c(t)]_v^{\mathbf{M}'}) = f^{\mathbf{M}'}([t]_v^{\mathbf{M}'}, c^{\mathbf{M}'}([t]_v^{\mathbf{M}'})) = f^{\mathbf{M}'}([t]_v^{\mathbf{M}'}, \overline{[t]_v^{\mathbf{M}'}}) = [t]_v^{\mathbf{M}'} + \overline{[t]_v^{\mathbf{M}'}} = 1$$