

**Examen 2ème session L2–L3 du 03/07/2020**

**Durée 1h30**

Téléphones et ordinateurs interdits. Le seul document autorisé est le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Dédution Naturelle. Inscrire votre numéro d'anonymat sur votre copie.

**Exercice 1 (1,5+(0,5+1)+(1+1)=5 points)**

Soit  $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  la formule représentée par :

$$\left( \forall y \square \left( \square, \square \left( \square, \square \right) \right) \right) \Rightarrow \left( \left( \square \square \exists \square \square \left( \square \left( \square, \square \right) \right) \right) \vee \square \left( \square, \square \right) \right)$$

où chaque case peut contenir un unique symbole : soit un quantificateur, soit un symbole de l'ensemble  $X = \{x, y, z\}$ , soit un symbole de l'ensemble  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$  avec  $\mathcal{F}_0 = \{k\}$  et  $\mathcal{F}_2 = \{f\}$ , soit un symbole de l'ensemble  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$  avec  $\mathcal{P}_1 = \{p\}$  et  $\mathcal{P}_2 = \{q\}$ . On souhaite que  $F$  vérifie les contraintes suivantes :

- $x$  admet uniquement deux occurrences libres et une occurrence liée par le quantificateur  $\forall$  dans  $F$ ,
- $y$  admet uniquement une occurrence liée par le quantificateur  $\forall$  et une occurrence liée par le quantificateur  $\exists$  dans  $F$ ,
- $z$  admet uniquement une occurrence libre dans  $F$ ,

1. Remplir les cases de  $F$  pour que les contraintes soient respectées.
2. Dessiner l'arbre de syntaxe de la formule  $F$  et encadrer les occurrences libres de variable.
3. Proposer une clôture universelle  $F'$  de  $F$  puis renommer certains symboles de variable de  $F'$  pour obtenir une formule  $F''$  logiquement équivalente à  $F'$  et dans laquelle les quantificateurs portent sur des symboles de variable différents.

**Exercice 2 (1+(1+2)+6=10 points)**

1. Donner la définition (mathématique) de l'équivalence de deux formules  $F_1$  et  $F_2$  de  $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$  ( $F_1 \models F_2$ ).
2. Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois formules atomiques et  $F_1$  et  $F_2$  les deux formules suivantes :

$$F_1 = (A \vee B) \Rightarrow (A \vee C) \quad F_2 = A \vee (B \Rightarrow C)$$

- (a) Etant donnée une structure  $\mathbf{M}$ , calculer les expressions booléennes  $[F_1]^\mathbf{M}$  et  $[F_2]^\mathbf{M}$  en fonction de  $\mathbf{I}_\mathbf{M}(A)$ ,  $\mathbf{I}_\mathbf{M}(B)$  et  $\mathbf{I}_\mathbf{M}(C)$  (sans effectuer de simplification).
- (b) En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que  $F_1 \models F_2$  (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
3. En utilisant les règles de la déduction naturelle (et les règles dérivées du formulaire), prouver la formule  $(A \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (A \vee C))$ .

**Exercice 3 (0,5+1+2+(0,5+0,5+0,5+1)+3+2=11points)**

Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$  un ensemble de symboles de fonction avec  $\mathcal{F}_0 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{k_i\}$  et  $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \odot\}$ , et  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p, q\}$  un ensemble de symboles de prédicat.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$  pour l'ensemble  $\mathcal{F}$ .
2. Donner une définition inductive du nombre d'occurrences  $nb_{op}(t)$  de symboles de  $\mathcal{F}_2$ , et du nombre d'occurrences  $nb_k(t)$  de symboles de constante de  $\mathcal{F}_0$ , dans un terme  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ .
3. Montrer par induction sur  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$  que  $nb_{op}(t) = nb_k(t) - 1$ .
4. Soit  $\mathbf{M}_1$  la structure dont le domaine  $|\mathbf{M}_1| = \wp_f(\mathbb{N})$  est l'ensemble des parties finies de  $\mathbb{N}$  (chaque élément  $E$  de  $|\mathbf{M}_1|$  est donc un ensemble fini d'entiers) telle que :

$$\begin{aligned}
k_i^{\mathbf{M}_1} &= \{0, 1, \dots, i\} & \oplus^{\mathbf{M}_1} : \wp_f(\mathbb{N}) \times \wp_f(\mathbb{N}) &\rightarrow \wp_f(\mathbb{N}) \\
&= \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq i\} & \oplus^{\mathbf{M}_1}(E_i, E_j) &= E_i \cup E_j \\
\ominus^{\mathbf{M}_1} : \wp_f(\mathbb{N}) \times \wp_f(\mathbb{N}) &\rightarrow \wp_f(\mathbb{N}) & \odot^{\mathbf{M}_1} : \wp_f(\mathbb{N}) \times \wp_f(\mathbb{N}) &\rightarrow \wp_f(\mathbb{N}) \\
\ominus^{\mathbf{M}_1}(E_i, E_j) &= E_i \setminus E_j & \odot^{\mathbf{M}_1}(E_i, E_j) &= E_i \cap E_j
\end{aligned}$$

- (a) Calculer  $[\oplus(k_i, k_j)]^{\mathbf{M}_1}$  lorsque  $i \leq j$ .
  - (b) Calculer  $[\ominus(k_i, k_j)]^{\mathbf{M}_1}$  lorsque  $i \geq j$ .
  - (c) Calculer  $[\odot(k_i, k_j)]^{\mathbf{M}_1}$  lorsque  $i \leq j$ .
  - (d) Donner un terme  $t$  tel que  $[t]^{\mathbf{M}_1} = \{2, 3, 7\}$ .
5. Etant donnés deux termes  $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ , on définit la formule :

$$F_{t_1, t_2} = (p(t_1, t_2) \Rightarrow q(\odot(t_1, t_2), t_1)) \wedge (q(\odot(t_1, t_2), t_1) \Rightarrow p(t_1, t_2))$$

- (a) Montrer que  $[F_{t_1, t_2}]^{\mathbf{M}} = 1$  lorsque  $\mathbf{M}$  est une structure telle que :

$$p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) \in |\mathbf{M}| \times |\mathbf{M}| \mid (\odot^{\mathbf{M}}(m_1, m_2), m_1) \in q^{\mathbf{M}}\}$$

- (b) On complète la structure  $\mathbf{M}_1$  de la question 4 en interprétant le symbole  $q$  par la relation d'égalité sur les ensembles :

$$q^{\mathbf{M}_1} = \{(E_1, E_2) \mid E_1 = E_2\}$$

Si la structure  $\mathbf{M}_1$  vérifie la propriété de la question précédente, quelle est la relation sur les ensembles définie par  $p^{\mathbf{M}_1}$  ?

**Exercice 4 (8 points)** Les étudiants ayant suivi l'UE de logique au premier semestre doivent uniquement traiter la question 1. tandis que ceux ayant suivi l'UE de logique au deuxième semestre doivent uniquement traiter la question 2.

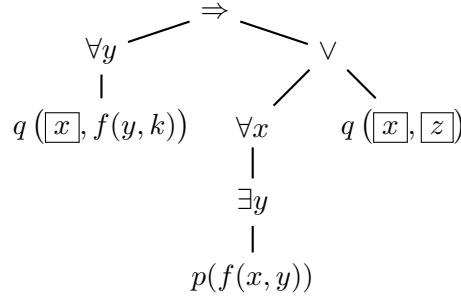
1. **Etudiants du premier semestre.** En utilisant les règles de la déduction naturelle (et les règles dérivées du formulaire), prouver la formule  $\exists x \forall y \neg p(x, y) \Rightarrow \neg \forall x \exists y p(x, y)$ .
2. **Etudiants du deuxième semestre.** En utilisant les règles de la déduction naturelle (et les règles dérivées du formulaire), prouver la formule  $((A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)) \Rightarrow (A \vee (B \Rightarrow C))$ .

**Corrigé de l'examen 2ème session L2-L3 du 03/07/2020**

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1.

$$1. (\forall y \boxed{q} (\boxed{x}, \boxed{f} (\boxed{y}, \boxed{k}))) \Rightarrow ((\forall \boxed{x} \exists \boxed{y} \boxed{p} (\boxed{f} (\boxed{x}, \boxed{y}))) \vee \boxed{q} (\boxed{x}, \boxed{z}))$$

2. L'arbre de syntaxe de  $F$  est (les occurrences de variable libre sont encadrées sur l'arbre représentant  $F$ , les autres occurrences sont liées) :



2.  $F' = \forall x \forall z F$ . Pour obtenir  $F''$  il suffit de renommer les variables liées de  $F'$  comme suit :

$$F'' = \forall x \forall z ((\forall y \boxed{q}(x, f(y, k))) \Rightarrow ((\forall x_1 \exists y_1 \boxed{p}(f(x_1, y_1))) \vee \boxed{q}(x, z)))$$

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2.

1.  $F_1 \models F_2$  si et seulement si pour toute structure  $\mathbf{M}$ ,  $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$ .

2.a.

$$\begin{aligned} [F_1]^{\mathbf{M}} &= \overline{[A \vee B]^{\mathbf{M}}} + [A \vee C]^{\mathbf{M}} = \overline{[A]^{\mathbf{M}} + [B]^{\mathbf{M}}} + ([A]^{\mathbf{M}} + [C]^{\mathbf{M}}) \\ &= \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(\overline{B}) + (\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(C)) \\ [F_2]^{\mathbf{M}} &= [A]^{\mathbf{M}} + [B \Rightarrow C]^{\mathbf{M}} = [A]^{\mathbf{M}} + (\overline{[B]^{\mathbf{M}}}) + [C]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + (\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)}) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(C) \end{aligned}$$

b. En posant  $x = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$ ,  $y = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)$  et  $z = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(C)$ , on a :

$$\begin{aligned} [F_1]^{\mathbf{M}} &= \overline{x + y} + (x + z) \stackrel{E4.4}{=} \overline{x} \cdot \overline{y} + (x + z) \stackrel{E3.4}{=} (\overline{x} \cdot \overline{y} + x) + z \stackrel{E3.1}{=} (x + \overline{x} \cdot \overline{y}) + z \\ &\stackrel{E4.2}{=} ((x + \overline{x}) \cdot (x + \overline{y})) + z \stackrel{E1.4}{=} (1 \cdot (x + \overline{y})) + z \stackrel{E2.2}{=} (x + \overline{y}) + z \stackrel{E3.4}{=} x + (\overline{y} + z) \\ &= [F_2]^{\mathbf{M}} \end{aligned}$$

Diagram illustrating the nested structure of the proof for the theorem. The diagram shows a sequence of nested boxes representing the scope of various assumptions and lemmas.

- Outermost box: (1) montrans  $(A \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (A \vee C))$
- Box (2): supposons  $h_1 : A \vee (B \Rightarrow C), h_2 : A \vee B$ , montrans  $A \vee C$ 
  - Box (3): supposons  $h_3 : A$ , montrans  $A \vee C$ 
    - Box (4): montrans  $A$ 
      - Box (4): CQFD (Ax avec  $h_3$ )
  - Box (3): CQFD ( $I_v^g$ )
- Box (4): supposons  $h_4 : B \Rightarrow C$ , montrans  $A \vee C$ 
  - Box (5): supposons  $h_5 : A$ , montrans  $A \vee C$ 
    - Box (6): montrans  $A$ 
      - Box (6): CQFD (Ax avec  $h_5$ )
  - Box (5): CQFD ( $I_v^g$ )
  - Box (6): supposons  $h_6 : B$ , montrans  $A \vee C$ 
    - Box (7): montrans  $C$ 
      - Box (7): CQFD ( $D \Rightarrow$  avec  $h_4, h_6$ )
    - Box (6): CQFD ( $I_v^d$ )
  - Box (4): CQFD ( $D_v$  avec  $h_2$ )
- Box (2): CQFD ( $D_v$  avec  $h_1$ )
- Box (1): CQFD ( $I_v^2$ )

2.

$$nb_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = k_i \\ nb_k(t_1) + nb_k(t_2) & \text{si } t = f(t_1, t_2) \\ \text{avec } f \in \mathcal{F}_2 & \end{cases} \quad nb_{op}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = k_i \\ 1 + nb_{op}(t_1) + nb_{op}(t_2) & \text{si } t = f(t_1, t_2) \\ \text{avec } f \in \mathcal{F}_2 & \end{cases}$$

$$\begin{aligned} nb_{op}(f(t_1, t_2)) &= 1 + nb_{op}(t_1) + nb_{op}(t_2) && \text{(par définition)} \\ &= 1 + nb_k(t_1) - 1 + nb_k(t_2) - 1 && \text{(par hypothèse d'induction)} \\ &= nb_k(t_1) + nb_k(t_2) - 1 = nb_k(f(t_1, t_2)) - 1 && \text{(par définition)} \end{aligned}$$

4

on peut choisir  $t = \ominus(\ominus(k_7, k_1), \ominus(k_6, k_3))$ .

5.a. On a :

$$\begin{aligned}
[F_{t_1, t_2}]^{\mathbf{M}} &= [(p(t_1, t_2) \Rightarrow q(\odot(t_1, t_2), t_1)) \wedge (q(\odot(t_1, t_2), t_1) \Rightarrow p(t_1, t_2))]^{\mathbf{M}} \\
&= [p(t_1, t_2) \Rightarrow q(\odot(t_1, t_2), t_1)]^{\mathbf{M}} \cdot [q(\odot(t_1, t_2), t_1) \Rightarrow p(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}} \\
&= \left( \overline{[p(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}}} + [q(\odot(t_1, t_2), t_1)]^{\mathbf{M}} \right) \cdot \left( [q(\odot(t_1, t_2), t_1)]^{\mathbf{M}} + \overline{[p(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}}} \right) \\
&\equiv \overline{[p(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}}} \cdot [q(\odot(t_1, t_2), t_1)]^{\mathbf{M}} + [p(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}} \cdot \overline{[q(\odot(t_1, t_2), t_1)]^{\mathbf{M}}} \\
&\quad + [q(\odot(t_1, t_2), t_1)]^{\mathbf{M}} \cdot \overline{[q(\odot(t_1, t_2), t_2)]^{\mathbf{M}}} + [q(\odot(t_1, t_2), t_1)]^{\mathbf{M}} \cdot [p(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}} \\
&\equiv \overline{[p(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}}} \cdot [q(\odot(t_1, t_2), t_1)]^{\mathbf{M}} + [q(\odot(t_1, t_2), t_1)]^{\mathbf{M}} \cdot [p(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}}
\end{aligned}$$

On distingue deux cas :

(i) Si  $([t_1]^{\mathbf{M}}, [t_2]^{\mathbf{M}}) \in p^{\mathbf{M}}$ , alors, par définition de  $p^{\mathbf{M}}$ ,  $(\odot^{\mathbf{M}}([t_1]^{\mathbf{M}}, [t_2]^{\mathbf{M}}), [t_1]^{\mathbf{M}}) \in q^{\mathbf{M}}$ , et on obtient  $[p(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}} = 1$  et  $[q(\odot(t_1, t_2), t_1)]^{\mathbf{M}} = 1$ , et donc  $[q(\odot(t_1, t_2), t_1)]^{\mathbf{M}} \cdot [p(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}} = 1$  ce qui permet d'obtenir  $[F_{t_1, t_2}]^{\mathbf{M}} = 1$ .

(ii) Si  $([t_1]^{\mathbf{M}}, [t_2]^{\mathbf{M}}) \notin p^{\mathbf{M}}$ , alors, par définition de  $p^{\mathbf{M}}$ ,  $(\odot^{\mathbf{M}}([t_1]^{\mathbf{M}}, [t_2]^{\mathbf{M}}), [t_1]^{\mathbf{M}}) \notin q^{\mathbf{M}}$ , et on obtient  $[p(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}} = 0$  et  $[q(\odot(t_1, t_2), t_1)]^{\mathbf{M}} = 0$ , et donc  $\overline{[p(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}}} \cdot [q(\odot(t_1, t_2), t_1)]^{\mathbf{M}} = 1$  ce qui permet d'obtenir  $[F_{t_1, t_2}]^{\mathbf{M}} = 1$ .

5.b. On a :

$$\begin{aligned}
&([t_1]^{\mathbf{M}_1}, [t_2]^{\mathbf{M}_1}) \in p^{\mathbf{M}_1} \\
\text{ssi } &(\odot^{\mathbf{M}_1}([t_1]^{\mathbf{M}_1}, [t_2]^{\mathbf{M}_1}), [t_1]^{\mathbf{M}_1}) \in q^{\mathbf{M}_1} \quad (\text{par définition de } p^{\mathbf{M}_1}) \\
\text{ssi } &\odot^{\mathbf{M}_1}([t_1]^{\mathbf{M}_1}, [t_2]^{\mathbf{M}_1}) = [t_1]^{\mathbf{M}_1} \quad (\text{par définition de } q^{\mathbf{M}_1}) \\
\text{ssi } &[t_1]^{\mathbf{M}_1} \cap [t_2]^{\mathbf{M}_1} = [t_1]^{\mathbf{M}_1} \quad (\text{par définition de } \odot^{\mathbf{M}_1}) \\
\text{ssi } &[t_1]^{\mathbf{M}_1} \subseteq [t_2]^{\mathbf{M}_1}
\end{aligned}$$

On a donc  $p^{\mathbf{M}_1} = \{(E_1, E_2) \mid E_1 \subseteq E_2\}$ .

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4.

1.

⟨1⟩	montrons $\exists x \forall y \neg p(x, y) \Rightarrow \neg \forall x \exists y p(x, y)$
⟨2⟩	supposons $h_1 : \exists x \forall y \neg p(x, y)$ , montrons $\neg \forall x \exists y p(x, y)$
⟨3⟩	supposons $h_2 : \forall x \exists y p(x, y)$ , montrons false
⟨4⟩	soit une nouvelle variable $x_1$ , supposons $h_3 : \forall y \neg p(x_1, y)$ , montrons false
⟨5⟩	montrons $\exists y p(x_1, y)$
⟨5⟩	CQFD ( $D_{\forall}$ avec $h_2$ )
⟨6⟩	montrons $\neg \exists y p(x_1, y)$
⟨7⟩	supposons $h_4 : \exists y p(x_1, y)$ , montrons false
⟨8⟩	soit une nouvelle variable $y_1$ , supposons $h_5 : p(x_1, y_1)$ , montrons false
⟨9⟩	montrons $\neg p(x_1, y_1)$
⟨9⟩	CQFD ( $D_{\forall}$ avec $h_3$ )
⟨10⟩	montrons $p(x_1, y_1)$
⟨10⟩	CQFD ( $Ax$ avec $h_5$ )
⟨8⟩	CQFD ( $E_{\neg}$ )
⟨7⟩	CQFD ( $D_{\exists}$ avec $h_4$ )
⟨6⟩	CQFD ( $I_{\neg}$ )
⟨4⟩	CQFD ( $E_{\neg}$ )
⟨3⟩	CQFD ( $D_{\exists}$ avec $h_1$ )
⟨2⟩	CQFD ( $I_{\neg}$ )
⟨1⟩	CQFD ( $I_{\Rightarrow}$ )

2.

