

Examen partiel du 10/11/2015
Durée 1h30

Le seul document autorisé est le formulaire de règles de la Dédution Naturelle.

Téléphones, Calculettes et Ordinateurs interdits.

Inscrire votre nom et votre numéro de groupe de TD sur votre copie.

La note (entre 0 et 60) est le minimum entre 60 et la somme des points obtenus (entre 0 et 63).

Exercice 1 (3+4+(1+1)+(3+2+2)=16 points)

1. Etant données deux formules de la logique des propositions F_1 et F_2 , donner la définition (mathématique) de $F_1 \models F_2$.
2. Démontrer qu'une formule F de la logique des propositions est valide si, et seulement si, $\text{true} \models F$.
3. Soit p un symbole de proposition.
 - (a) A-t-on $\text{true} \models p \wedge \neg p$? (Justifier.)
 - (b) A-t-on $p \wedge \neg p \models \text{true}$? (Justifier.)
4. On considère la formule $(\neg p \vee q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.
 - (a) Exprimer $[(\neg p \vee q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)]^I$ en fonction de $I(p)$ et $I(q)$.
 - (b) Cette formule est-elle satisfiable ? (Justifier.)
 - (c) Cette formule est-elle valide ? (Justifier.)

Exercice 2 (3+6+6=15 points)

Une élection est organisée pour sélectionner l'acteur qui incarnera le premier rôle dans la série "Les Revenants". Trois vieux amis de longue date, Nicolas, Alain et François décident de se présenter à cette élection. Nicolas et Alain font les déclarations suivantes :

Nicolas : "*Si au moins l'un de nous trois triche, alors nous trichons tous les trois.*"

Alain : "*Si Nicolas triche, alors François triche aussi.*"

1. Exprimer par une formule de la logique des propositions les déclarations de Nicolas et Alain en utilisant les propositions suivantes :

p : "*Nicolas triche.*" q : "*François triche.*" r : "*Alain triche.*"

2. Si l'on suppose que Nicolas et Alain mentent toujours, que peut-on en déduire ?
3. On suppose maintenant que François triche, peut-on déduire qui ment ? qui dit la vérité ?

Exercice 3 (8+8=16 points)

En utilisant les règles de la déduction naturelle, prouver les deux formules suivantes :

1. $(A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$
2. $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

Exercice 4 (6+(4+6)=16 points)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{V, F\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{c\}$ (c-à-d V et F sont des symboles de constante et c est un symbole de fonction d'arité 1). Pour tout entier n , on définit les termes :

$$\begin{aligned} c^0(V) &= V & c^0(F) &= F \\ c^{n+1}(V) &= c(c^n(V)) & c^{n+1}(F) &= c(c^n(F)) \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{c^n(V), c^n(F)\}$.
2. On considère la structure \mathbf{M} de domaine $|\mathbf{M}| = \{0, 1\}$ telle que :

$$\begin{aligned} V^{\mathbf{M}} &= 1 & c^{\mathbf{M}} : \{0, 1\} &\rightarrow \{0, 1\} \\ F^{\mathbf{M}} &= 0 & c^{\mathbf{M}}(0) &= 1 \\ & & c^{\mathbf{M}}(1) &= 0 \end{aligned}$$

- (a) Calculer $[c(F)]_v^{\mathbf{M}}$ et $[c(c(V))]_v^{\mathbf{M}}$.
- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \forall k \in \{V, F\} [c^{2n}(k)]_v^{\mathbf{M}} = [k]_v^{\mathbf{M}}$.

Corrigé de l'examen partiel du 10/11/2015

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1.

(1). $F_1 \models F_2$ si, et seulement si, pour toute interprétation \mathbf{I} , si $[F_1]^{\mathbf{I}} = 1$, alors $[F_2]^{\mathbf{I}} = 1$.

(2). On a :

$\text{true} \models F$
ssi pour toute interprétation \mathbf{I} , si $[\text{true}]^{\mathbf{I}} = 1$ alors $[F]^{\mathbf{I}} = 1$
ssi pour toute interprétation \mathbf{I} , si $1 = 1$ alors $[F]^{\mathbf{I}} = 1$
ssi pour toute interprétation \mathbf{I} , $[F]^{\mathbf{I}} = 1$
ssi F est valide

(3). (a). Non car $p \wedge \neg p$ est insatisfiable et n'est donc pas valide. (b). Oui car l'ensemble des interprétations \mathbf{I} tel que $[p \wedge \neg p]^{\mathbf{I}} = 1$ est vide.

(4). (a). Construction de l'expression booléenne :

$$\begin{aligned} & [(\neg p \vee q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)]^{\mathbf{I}} \\ &= [\neg p \vee q]^{\mathbf{I}} + [q \Rightarrow p]^{\mathbf{I}} = \overline{[p]^{\mathbf{I}}} + [q]^{\mathbf{I}} + \overline{[q]^{\mathbf{I}}} + [p]^{\mathbf{I}} = \overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q) + \overline{\mathbf{I}(q)} + \mathbf{I}(p) \end{aligned}$$

Simplification de l'expression booléenne :

$$\begin{aligned} & \overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q) + \overline{\mathbf{I}(q)} + \mathbf{I}(p) \\ \equiv & \overline{\mathbf{I}(p)} \cdot \overline{\mathbf{I}(q)} + \overline{\mathbf{I}(q)} + \mathbf{I}(p) & (\text{E4.4}) \\ \equiv & \mathbf{I}(p) \cdot \overline{\mathbf{I}(q)} + \overline{\mathbf{I}(q)} + \mathbf{I}(p) & (\text{E1.2}) \\ \equiv & \dots \equiv \mathbf{I}(p) \cdot \overline{\mathbf{I}(q)} + \mathbf{I}(p) + \overline{\mathbf{I}(q)} & (\text{E3.1}) \text{ et } (\text{E3.4}) \\ \equiv & \mathbf{I}(p) \cdot \overline{\mathbf{I}(q)} + \mathbf{I}(p) \cdot 1 + \overline{\mathbf{I}(q)} & (\text{E2.6}) \\ \equiv & \mathbf{I}(p) \cdot (\overline{\mathbf{I}(q)} + 1) + \overline{\mathbf{I}(q)} & (\text{E4.1}) \\ \equiv & \mathbf{I}(p) \cdot 1 + \overline{\mathbf{I}(q)} & (\text{E3.7}) \\ \equiv & \mathbf{I}(p) + \overline{\mathbf{I}(q)} & (\text{E2.6}) \end{aligned}$$

(b). Pour une interprétation \mathbf{I}_1 telle que $\mathbf{I}_1(p) = \mathbf{I}_1(q) = 1$, on a $[(\neg p \vee q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)]^{\mathbf{I}_1} = \mathbf{I}_1(p) + \overline{\mathbf{I}_1(q)} = 1$ car :

raisonnement équationnel	calcul
$1 + \overline{1}$	$1 + \overline{1}$
$\equiv 1$ (E3.3)	$= 1 + 0 \quad (\overline{1} = 0)$
	$= 1 \quad (1 + 0 = 1)$

et donc $(\neg p \vee q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ est satisfiable. (c). Pour une interprétation \mathbf{I}_2 telle que $\mathbf{I}_2(p) = 0$ et $\mathbf{I}_2(q) = 1$, on a $[(\neg p \vee q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)]^{\mathbf{I}_2} = \mathbf{I}_2(p) + \overline{\mathbf{I}_2(q)} = 0$ car :

raisonnement équationnel	calcul
$0 + \overline{1}$	$0 + \overline{1}$
$\equiv \overline{0}$ (E3.2)	$= 0 + 0 \quad (\overline{1} = 0)$
$\equiv \overline{0}$ (E1.1)	$= 0 \quad (0 + 0 = 1)$
$\equiv 0$ (E1.2)	

et donc $(\neg p \vee q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ n'est pas valide.

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2.

(1). Nicolas (formule F_N) : $(p \vee q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)$ Alain (formule F_A) : $p \Rightarrow q$

Sans utiliser de table de vérité.

Construction de l'expression booléenne $[F_N]^{\mathbf{I}}$:

$$[F_N]^{\mathbf{I}} = \overline{[p \vee q \vee r]^{\mathbf{I}}} + [p \wedge q \wedge r]^{\mathbf{I}} = \overline{[p]^{\mathbf{I}} + [q]^{\mathbf{I}} + [r]^{\mathbf{I}}} + [p]^{\mathbf{I}} \cdot [q]^{\mathbf{I}} \cdot [r]^{\mathbf{I}} = \overline{\mathbf{I}(p) + \mathbf{I}(q) + \mathbf{I}(r)} + \mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q) \cdot \mathbf{I}(r)$$

Simplification de l'expression booléenne $[F_N]^{\mathbf{I}}$:

$$\begin{aligned} [F_N]^{\mathbf{I}} &= \overline{\mathbf{I}(p) + \mathbf{I}(q) + \mathbf{I}(r)} + \mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q) \cdot \mathbf{I}(r) \\ &\equiv \overline{\mathbf{I}(p)} \cdot \overline{\mathbf{I}(q)} \cdot \overline{\mathbf{I}(r)} + \mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q) \cdot \mathbf{I}(r) \end{aligned} \quad (\text{E4.4})$$

Construction de l'expression booléenne $[F_A]^{\mathbf{I}}$:

$$[F_A]^{\mathbf{I}} = \overline{[p]^{\mathbf{I}}} + [q]^{\mathbf{I}} = \overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q)$$

(2). Si l'on suppose que Nicolas et Alain mentent toujours, alors $\overline{[F_N]^{\mathbf{I}}} = 1$ et $\overline{[F_A]^{\mathbf{I}}} = 1$.

Simplification de l'expression booléenne $[F_N]^{\mathbf{I}}$:

$$\begin{aligned} \overline{[F_N]^{\mathbf{I}}} &= \overline{\overline{\mathbf{I}(p)} \cdot \overline{\mathbf{I}(q)} \cdot \overline{\mathbf{I}(r)} + \mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q) \cdot \mathbf{I}(r)} \\ &\equiv \overline{\overline{\mathbf{I}(p)} \cdot \overline{\mathbf{I}(q)} \cdot \overline{\mathbf{I}(r)}} \cdot \overline{\mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q) \cdot \mathbf{I}(r)} \quad (\text{E4.4}) \\ &\equiv (\overline{\overline{\mathbf{I}(p)}} + \overline{\overline{\mathbf{I}(q)}} + \overline{\overline{\mathbf{I}(r)}}) \cdot \overline{\mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q) \cdot \mathbf{I}(r)} \quad (\text{E4.3}) \\ &\equiv (\mathbf{I}(p) + \mathbf{I}(q) + \mathbf{I}(r)) \cdot \overline{\mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q) \cdot \mathbf{I}(r)} \quad (\text{E1.2}) \\ &\equiv (\mathbf{I}(p) + \mathbf{I}(q) + \mathbf{I}(r)) \cdot (\overline{\mathbf{I}(p)} + \overline{\mathbf{I}(q)} + \overline{\mathbf{I}(r)}) \quad (\text{E4.3}) \end{aligned}$$

Simplification de l'expression booléenne $\overline{[F_A]^{\mathbf{I}}}$:

$$\begin{aligned} \overline{[F_A]^{\mathbf{I}}} &= \overline{\overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q)} \\ &\equiv \overline{\overline{\mathbf{I}(p)}} \cdot \overline{\mathbf{I}(q)} \quad (\text{E4.4}) \\ &\equiv \mathbf{I}(p) \cdot \overline{\mathbf{I}(q)} \quad (\text{E1.2}) \end{aligned}$$

Puisque $\overline{[F_A]^{\mathbf{I}}} = \mathbf{I}(p) \cdot \overline{\mathbf{I}(q)} = 1$, on a forcément $\mathbf{I}(p) = 1$ et $\mathbf{I}(q) = 0$ et donc on peut conclure que Nicolas triche et François ne triche pas. Par contre on ne peut rien en déduire sur Alain puisque lorsque $\mathbf{I}(p) = 1$ et $\mathbf{I}(q) = 0$, on a :

$$(\mathbf{I}(p) + \mathbf{I}(q) + \mathbf{I}(r)) \cdot (\overline{\mathbf{I}(p)} + \overline{\mathbf{I}(q)} + \overline{\mathbf{I}(r)}) = (1 + 0 + \mathbf{I}(r)) \cdot (\overline{1} + \overline{0} + \overline{\mathbf{I}(r)}) = 1 \cdot 1 = 1$$

quelle que soit la valeur de $\mathbf{I}(r)$.

(3). Si l'on suppose que François triche, alors $\mathbf{I}(q) = 1$ et il vient :

$$[F_N]^{\mathbf{I}} = \overline{\mathbf{I}(p)} \cdot \overline{\mathbf{I}(q)} \cdot \overline{\mathbf{I}(r)} + \mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q) \cdot \mathbf{I}(r) = 0 + \mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(r) = \mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(r)$$

$$[F_A]^{\mathbf{I}} = \overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q) = \overline{\mathbf{I}(p)} + 1 = 1$$

On peut donc en déduire que Alain dit la vérité mais on ne peut rien dire sur Nicolas.

En utilisant une table de vérité.

$\mathbf{I}(p)$	$\mathbf{I}(q)$	$\mathbf{I}(r)$	$[F_N]^{\mathbf{I}}$	$[F_A]^{\mathbf{I}}$	$[\neg F_N \wedge \neg F_A]^{\mathbf{I}}$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0

(2). Seules les interprétations \mathbf{I}_1 et \mathbf{I}_2 expriment que Nicolas et Alain mentent toujours, et pour ces interprétations on peut remarquer que $\mathbf{I}_1(p) = \mathbf{I}_2(p) = 1$ et $\mathbf{I}_1(q) = \mathbf{I}_2(q) = 0$. On peut donc en déduire que Nicolas triche et François ne triche pas puisque $\neg F_N \wedge \neg F_A \models p \wedge \neg q$. Par contre, on ne peut rien déduire sur Alain puisque $\mathbf{I}_1(r) = 0$ et $\mathbf{I}_2(r) = 1$.

(3). Seules les interprétations $\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_4, \mathbf{I}_5$ et \mathbf{I}_6 expriment que François triche, et pour ces interprétations on peut remarquer que $[F_A]^{\mathbf{I}_3} = [F_A]^{\mathbf{I}_4} = [F_A]^{\mathbf{I}_5} = [F_A]^{\mathbf{I}_6} = 1$. On peut donc en déduire que Alain dit la vérité puisque $q \models F_A$. Par contre, on ne peut rien déduire sur Nicolas puisque $[F_N]^{\mathbf{I}_3} = 0$ et $[F_N]^{\mathbf{I}_6} = 1$.

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3.

(1) montrons $(A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$
 (2) supposons $h_1 : A \vee B$
 montrons $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
 (3) supposons $h_2 : A \Rightarrow B$
 montrons B
 (4) montrons $A \vee B$
 c'est l'hypothèse h_1
 (4) CQFD (Ax)
 (5) supposons $h_3 : A$
 montrons B
 (6) montrons $A \Rightarrow B$
 c'est l'hypothèse h_2
 (6) CQFD (Ax)
 (7) montrons A
 c'est l'hypothèse h_3
 (7) CQFD (Ax)
 (5) CQFD ($E \Rightarrow$)
 (6) supposons $h_4 : B$
 montrons B
 c'est l'hypothèse h_4
 (6) CQFD (Ax)
 (3) CQFD ($E \vee$)
 (2) CQFD ($I \Rightarrow$)
 (1) CQFD ($I \Rightarrow$)

Supposons que $[c^{2n}(k)]_v^{\mathbf{M}} = [k]_v^{\mathbf{M}}$, et montrons $[c^{2(n+1)}(k)]_v^{\mathbf{M}} = [k]_v^{\mathbf{M}}$. On a :

$$\begin{aligned}
[c^{2(n+1)}(k)]_v^{\mathbf{M}} &= [c^{2n+2}(k)]_v^{\mathbf{M}} \\
&= c^{\mathbf{M}}([c^{2n+1}(k)]_v^{\mathbf{M}}) \\
&= c^{\mathbf{M}}(c^{\mathbf{M}}([c^{2n}(k)]_v^{\mathbf{M}})) \\
&= c^{\mathbf{M}}(c^{\mathbf{M}}([k]_v^{\mathbf{M}})) \quad (\text{hypothèse de récurrence})
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure puisque si $k = V$, il vient $[c^{2(n+1)}(V)]_v^{\mathbf{M}} = c^{\mathbf{M}}(c^{\mathbf{M}}(1)) = 1 = [V]_v^{\mathbf{M}}$, et si $k = F$, il vient $[c^{2(n+1)}(F)]_v^{\mathbf{M}} = c^{\mathbf{M}}(c^{\mathbf{M}}(0)) = 0 = [F]_v^{\mathbf{M}}$.