

**Examen partiel du 07/11/2017****Durée 1h30**

Téléphones, calculettes et ordinateurs interdits.

Le seul document autorisé est le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Dédution Naturelle. Inscrivez votre nom et votre numéro de groupe de TD sur votre copie. La note (entre 0 et 60) est le minimum entre 60 et la somme des points obtenus (entre 0 et 69).

**Exercice 1 (1+1+1+2+2+2=9 points)**

A partir de l'ensemble de symboles de variable  $X = \{w, x, y, z\}$  on définit la formule  $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  suivante :  $\forall y (p(f(g(x), y)) \wedge \forall x (q(g(z), x) \Rightarrow \exists z p(f(z, w))))$

1. Quels sont les symboles de fonction apparaissant dans cette formule ?
2. Quels sont les symboles de prédicat apparaissant dans cette formule ?
3. Quels sont les termes apparaissant en argument des symboles de prédicat de  $F$  ?
4. Déterminer l'ensemble  $\text{Free}(F)$  des variables qui ont au moins une occurrence libre dans  $F$ .
5. Quelles sont les variables de  $\text{Free}(F)$  qui admettent au moins une occurrence liée dans  $F$  ?
6. Déterminer une clôture universelle de la formule  $F$ .

**Exercice 2 (10+12=22 points)**

Avec les règles de la déduction naturelle prouver les deux formules ci-dessous (on pourra utiliser les règles dérivées du formulaire).

$$(A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \qquad ((A \vee \neg B) \wedge B) \Rightarrow A$$

**Exercice 3 (2+(5+6+3+2+2)=20 points)**

1. Donner la définition d'une formule de  $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$  valide.
2. Soit  $F$  la formule  $((A \vee \neg B) \wedge B) \Rightarrow A$ .
  - (a) Etant donnée une structure  $\mathbf{M}$ , calculer l'expression booléenne  $[F]^{\mathbf{M}}$  en fonction de  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$  et  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)$  (sans effectuer de simplification).
  - (b) En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que  $F$  est une formule valide (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
  - (c) A-t-on  $(A \vee \neg B) \wedge B \models A$  ? (justifier)
  - (d) Soit  $F_1$  une formule quelconque. A-t-on  $\neg F \models F_1$  ? (justifier)
  - (e) Soit  $F_2$  une formule telle que  $F \models F_2$ . La formule  $F_2$  est-elle satisfiable ? valide ? (justifier)

**Exercice 4 (2+(1+3+4)+(4+4)=18 points)**

Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  un ensemble de symboles de fonction avec  $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \{\odot\}$  et  $\mathcal{F}_2 = \{\oplus\}$ .

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$  pour l'ensemble  $\mathcal{F} = \{a, b, \odot, \oplus\}$ .
2. On définit une structure  $\mathbf{M}_1$  dont le domaine est l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels comme suit :

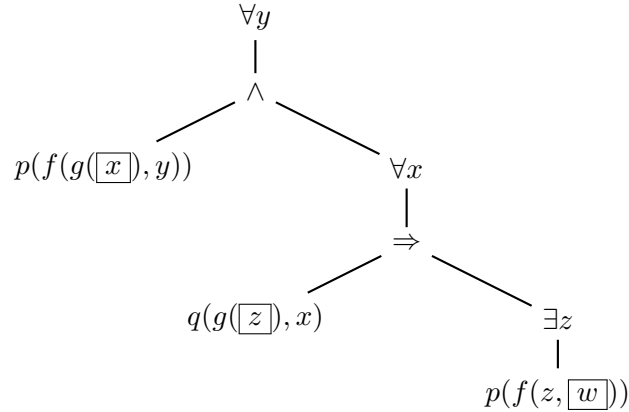
$$\begin{aligned} a^{\mathbf{M}_1} &= 0 & \odot^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & \oplus^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ b^{\mathbf{M}_1} &= 2 & \odot^{\mathbf{M}_1}(n) &= n & \oplus^{\mathbf{M}_1}(n_1, n_2) &= n_1 + n_2 \end{aligned}$$

- (a) Calculer  $[\oplus(\odot(b), a)]^{\mathbf{M}_1}$ .
  - (b) Donner une définition inductive du nombre  $\text{nba}(t)$  d'occurrences de la constante  $a$  dans un terme  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ .
  - (c) Montrer par induction que pour tout terme  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ ,  $[t]^{\mathbf{M}_1}$  est pair.
3. Soit  $F$  la formule logique  $p(\odot(a), \oplus(a, b)) \Rightarrow p(\oplus(a, b), \odot(a))$ .
    - (a) Définir une structure  $\mathbf{M}_2$  telle que  $[F]^{\mathbf{M}_2} = 1$ . (justifier)
    - (b) Définir une structure  $\mathbf{M}_3$  telle que  $[F]^{\mathbf{M}_3} = 0$ . (justifier)

## Corrigé de l'examen partiel du 07/11/2017

## ► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1.

- (1). Symboles de fonction apparaissant dans  $F$  :  $f \in \mathcal{F}_2$  et  $g \in \mathcal{F}_1$   
 (2). Symboles de prédicat apparaissant dans  $F$  :  $p \in \mathcal{P}_1$  et  $q \in \mathcal{P}_2$   
 (3). Termes apparaissant en argument des symboles de prédicat de  $F$  :  $f(g(x), y)$ ,  $g(z)$ ,  $x$  et  $f(z, w)$   
 (4 et 5). Les occurrences de variables libres sont encadrées sur l'arbre de syntaxe abstraite de la formule  $F$  (les autres occurrences sont liées) :



On a donc  $\text{Free}(F) = \{w, x, z\}$  et les variables  $x$  et  $z$  admettent une occurrence liée dans  $F$ .

- (6). Clôture universelle de  $F$  :  $\forall w \forall x \forall z \forall y (p(f(g(x), y)) \wedge \forall x (q(g(z), x) \Rightarrow \exists z p(f(z, w))))$

## ► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2.

⟨1⟩	montrons $(A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$
⟨2⟩	supposons $h_1 : A \vee B$ , montrons $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
⟨3⟩	supposons $h_2 : A \Rightarrow B$ , montrons $B$
⟨4⟩	montrons $A \vee B$ c'est l'hypothèse $h_1$
⟨4⟩	CQFD (Ax)
⟨5⟩	supposons $h_3 : A$ , montrons $B$
⟨5⟩	CQFD ( $D \Rightarrow$ avec $h_2, h_3$ )
⟨6⟩	supposons $h_4 : B$ , montrons $B$ c'est l'hypothèse $h_4$
⟨6⟩	CQFD (Ax)
⟨3⟩	CQFD ( $E_\vee$ )
⟨2⟩	CQFD ( $I_\Rightarrow$ )
⟨1⟩	CQFD ( $I_\Rightarrow$ )



(2.a).

$$\begin{aligned} [\oplus(\odot(b), a)]^{\mathbf{M}_1} &= \oplus^{\mathbf{M}_1}([\odot(b)]^{\mathbf{M}_1}, [a]^{\mathbf{M}_1}) = \oplus^{\mathbf{M}_1}(\odot^{\mathbf{M}_1}([b]^{\mathbf{M}_1}), a^{\mathbf{M}_1}) = \oplus^{\mathbf{M}_1}(\odot^{\mathbf{M}_1}(b^{\mathbf{M}_1}), a^{\mathbf{M}_1}) \\ &= \oplus^{\mathbf{M}_1}(\odot^{\mathbf{M}_1}(2), 0) = 2 + 0 = 2 \end{aligned}$$

(2.b). Définition inductive du nombre  $\text{nba}(t)$  d'occurrences de  $a$  dans  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$  :

$$\text{nba}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = a \\ 0 & \text{si } t = b \\ \text{nba}(t_1) & \text{si } t = \odot(t_1) \\ \text{nba}(t_1) + \text{nba}(t_2) & \text{si } t = \oplus(t_1, t_2) \end{cases}$$

(2.c). Par induction sur  $t$ .

Si  $t = a$  alors  $[a]^{\mathbf{M}_1} = 0$  est un entier pair.

Si  $t = b$  alors  $[b]^{\mathbf{M}_1} = 2$  est un entier pair.

Soit  $t = \odot(t_1)$ , par hypothèse d'induction  $[t_1]^{\mathbf{M}_1}$  est pair et  $[\odot(t_1)]^{\mathbf{M}_1} = \odot^{\mathbf{M}_1}([t_1]^{\mathbf{M}_1}) = [t_1]^{\mathbf{M}_1}$  est donc aussi pair.

Soit  $t = \oplus(t_1, t_2)$ , par hypothèse d'induction  $[t_1]^{\mathbf{M}_1}$  et  $[t_2]^{\mathbf{M}_1}$  sont pairs et puisque la somme de deux entiers pairs est paire,  $[\oplus(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}_1} = \oplus^{\mathbf{M}_1}([t_1]^{\mathbf{M}_1}, [t_2]^{\mathbf{M}_1}) = [t_1]^{\mathbf{M}_1} + [t_2]^{\mathbf{M}_1}$  est pair.

(3.a). Il suffit d'étendre la structure  $\mathbf{M}_1$  en une structure  $\mathbf{M}_2$  comme suit :

$$\begin{aligned} a^{\mathbf{M}_2} &= 0 & \odot^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & \oplus^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & p^{\mathbf{M}_2} &\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ b^{\mathbf{M}_2} &= 2 & \odot^{\mathbf{M}_2}(n) &= n & \oplus^{\mathbf{M}_2}(n_1, n_2) &= n_1 + n_2 & p^{\mathbf{M}_2} &= \{(n_1, n_2) \mid n_1 + n_2 = 2\} \end{aligned}$$

En effet, puisque :

$$\begin{aligned} [\odot(a)]^{\mathbf{M}_2} &= \odot^{\mathbf{M}_2}([a]^{\mathbf{M}_2}) = \odot^{\mathbf{M}_2}(a^{\mathbf{M}_2}) = \odot^{\mathbf{M}_2}(0) = 0 \\ [\oplus(a, b)]^{\mathbf{M}_2} &= \oplus^{\mathbf{M}_2}([a]^{\mathbf{M}_2}, [b]^{\mathbf{M}_2}) = \oplus^{\mathbf{M}_2}(a^{\mathbf{M}_2}, b^{\mathbf{M}_2}) = \oplus^{\mathbf{M}_2}(0, 2) = 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} ([\odot(a)]^{\mathbf{M}_2}, [\oplus(a, b)]^{\mathbf{M}_2}) &= (0, 2) \in p^{\mathbf{M}_2} \text{ et donc } \mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(p(\odot(a), \oplus(a, b))) = 1 \\ ([\oplus(a, b)]^{\mathbf{M}_2}, [\odot(a)]^{\mathbf{M}_2}) &= (2, 0) \in p^{\mathbf{M}_2} \text{ et donc } \mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(p(\oplus(a, b), \odot(a))) = 1 \end{aligned}$$

et il vient :

$$\begin{aligned} [F]^{\mathbf{M}_2} &= \overline{[p(\odot(a), \oplus(a, b))]^{\mathbf{M}_2}} + [p(\oplus(a, b), \odot(a))]^{\mathbf{M}_2} \\ &= \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(p(\odot(a), \oplus(a, b)))} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(p(\oplus(a, b), \odot(a))) = \bar{1} + 1 = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

(3.b). Il suffit d'étendre la structure  $\mathbf{M}_1$  en une structure  $\mathbf{M}_3$  comme suit :

$$\begin{aligned} a^{\mathbf{M}_3} &= 0 & \odot^{\mathbf{M}_3} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & \oplus^{\mathbf{M}_3} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & p^{\mathbf{M}_3} &\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ b^{\mathbf{M}_3} &= 2 & \odot^{\mathbf{M}_3}(n) &= n & \oplus^{\mathbf{M}_3}(n_1, n_2) &= n_1 + n_2 & p^{\mathbf{M}_3} &= \{(n_1, n_2) \mid n_1 \leq n_2\} \end{aligned}$$

En effet, puisque  $[\odot(a)]^{\mathbf{M}_3} = [\odot(a)]^{\mathbf{M}_2} = 0$  et  $[\oplus(a, b)]^{\mathbf{M}_3} = [\oplus(a, b)]^{\mathbf{M}_2} = 2$  on a :

$$\begin{aligned} ([\odot(a)]^{\mathbf{M}_3}, [\oplus(a, b)]^{\mathbf{M}_3}) &= (0, 2) \in p^{\mathbf{M}_3} \text{ et donc } \mathbf{I}_{\mathbf{M}_3}(p(\odot(a), \oplus(a, b))) = 1 \\ ([\oplus(a, b)]^{\mathbf{M}_3}, [\odot(a)]^{\mathbf{M}_3}) &= (2, 0) \notin p^{\mathbf{M}_3} \text{ et donc } \mathbf{I}_{\mathbf{M}_3}(p(\oplus(a, b), \odot(a))) = 0 \end{aligned}$$

et il vient :

$$\begin{aligned} [F]^{\mathbf{M}_3} &= \overline{[p(\odot(a), \oplus(a, b))]^{\mathbf{M}_3}} + [p(\oplus(a, b), \odot(a))]^{\mathbf{M}_3} \\ &= \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}_3}(p(\odot(a), \oplus(a, b)))} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}_3}(p(\oplus(a, b), \odot(a))) = \bar{1} + 0 = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$