

**Examen partiel du 03/12/2020**

**Durée 1h30**

Téléphones, calculatrices et ordinateurs interdits.

Les seuls documents autorisés sont les formulaires des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Dédution Naturelle.

**Inscrire votre nom et votre numéro de groupe (ou jour) de TD sur votre copie.**

**Exercice 1 ((1,5+0,5+1,5+0,5)+(1,5+3,5)=9 points)**

- A partir de l'ensemble de symboles de variable  $X = \{x, y, z\}$  et  $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$  on définit la formule  $F_1 \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  suivante :  $(\forall x((p(a, x) \wedge q(y, x)) \Rightarrow \exists x p(x, b))) \vee ((\exists y p(x, y)) \wedge q(x, z))$ 
  - Dessiner l'arbre de syntaxe abstraite de la formule  $F_1$ .
  - Donner l'ensemble  $\text{Free}(F_1)$ .
  - Dire, pour chacune des occurrences de  $x$ , si elle est quantifiée universellement, existentiellement, ou pas quantifiée.
  - Déterminer une clôture universelle de la formule  $F_1$ .
- On considère les symboles  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  et  $s_6$  appartenant à  $X \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$  à partir desquels on définit la formule  $F_2 \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  suivante :  $\exists s_3 ((s_1(s_2, s_3) \wedge s_4(s_5(s_2))) \Rightarrow \forall s_6 s_1(s_5(s_6), s_3))$ .
  - Quelles sont les formules atomiques apparaissant dans  $F_2$  ?
  - Déterminer à quels ensembles chacun des symboles  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  et  $s_6$  peut appartenir (c-à-d déterminer s'il peut s'agir d'un symbole de variable de  $X$ , d'un symbole de constante de  $\mathcal{F}_0$ , d'un symbole de fonction de  $\mathcal{F}$  ou d'un symbole de prédicat de  $\mathcal{P}$ ).

**Exercice 2 (8+8=16 points)**

Avec les règles de la déduction naturelle prouver les deux formules ci-dessous (on pourra utiliser les règles dérivées du formulaire).

$$(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B)) \qquad (A \vee (B \wedge C)) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \vee (A \Rightarrow C))$$

**Exercice 3 (1+(2+2+2+1,5+1,5)=10 points)**

- Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux formules de  $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ . Donner la définition mathématique de  $F_1 \models F_2$ .
- Soient les formules  $F_1$  et  $F_2$  suivantes :
 
$$F_1 = (\neg A \vee A) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

$$F_2 = (B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \vee A)$$
  - Etant donnée une structure  $\mathbf{M}$ , calculer les expressions booléennes  $[F_1]^\mathbf{M}$  et  $[F_2]^\mathbf{M}$  en fonction de  $\mathbf{I}_\mathbf{M}(A)$  et  $\mathbf{I}_\mathbf{M}(B)$  (sans effectuer de simplification).
  - En utilisant un raisonnement équationnel, simplifier les expressions booléennes  $[F_1]^\mathbf{M}$  et  $[F_2]^\mathbf{M}$  (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
  - Les formules  $F_1$  et  $F_2$  sont-elles satisfiables ? valides ? (justifier)
  - Soit la formule  $F_3 = (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \vee A)$ , que pouvez-vous dire de  $[F_3]^\mathbf{M}$  ? (justifier)
  - A-t-on  $\neg F_2 \models F_1$  ? (justifier)

**Exercice 4 (1+(1+3)+(3+3)=11 points)**

Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  un ensemble de symboles de fonction où  $\mathcal{F}_2 = \{\otimes\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \{\odot\}$  et  $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$  pour l'ensemble  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ .
2. Soit la structure  $\mathbf{M}_1$  suivante définie sur  $\mathbb{N}$ ,  $|\mathbf{M}_1| = \mathbb{N}$  :

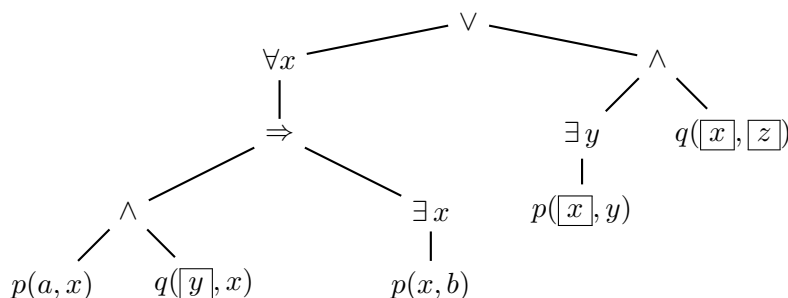
$$\begin{aligned} a^{\mathbf{M}_1} &= 2 & \odot^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & \otimes^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ b^{\mathbf{M}_1} &= 4 & \odot^{\mathbf{M}_1}(n) &= 2 * n & \otimes^{\mathbf{M}_1}(n_1, n_2) &= n_1 * n_2 \end{aligned}$$

- (a) Calculer  $[\otimes(\odot(b), a)]^{\mathbf{M}_1}$
  - (b) Montrer que pour tout  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $[t]^{\mathbf{M}_1} = 2^n$ .
3. On considère maintenant l'ensemble des symboles de prédicat  $\mathcal{P} = \{p\}$  contenant l'unique prédicat  $p$  d'arité 2 et la formule  $F = p(\odot(a), \odot(b)) \Rightarrow (p(\otimes(a, b), a) \vee p(\otimes(a, b), b))$
- (a) Définir une structure  $\mathbf{M}_2$  telle que  $[F]^{\mathbf{M}_2} = 1$ . (justifier)
  - (b) Définir une structure  $\mathbf{M}_3$  telle que  $[F]^{\mathbf{M}_3} = 0$ . (justifier)

## Corrigé de l'examen partiel du 03/12/2020

### ► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1.

(1.a). L'arbre de syntaxe abstraite de la formule  $F_1$  est (les occurrences libres de variable sont encadrées, les autres occurrences sont liées) :



(1.b). Les occurrences libres de symboles de variables sont encadrées dans l'arbre précédent. On a donc  $\text{Free}(F_1) = \{x, y, z\}$ .

(1.c). Dans  $p(a, x)$  et  $q(y, x)$ , la variable  $x$  est quantifiée universellement ; dans  $p(x, b)$ , elle est quantifiée existentiellement. Les deux autres occurrences de  $x$  ne sont pas quantifiées.

(1.d). Clôture universelle de  $F_1$  :  $\forall x \forall y \forall z F_1$

(2.a). Les formules atomiques apparaissant dans  $F_2$  sont  $s_1(s_2, s_3)$ ,  $s_4(s_5(s_2))$  et  $s_1(s_5(s_6), s_3)$ .

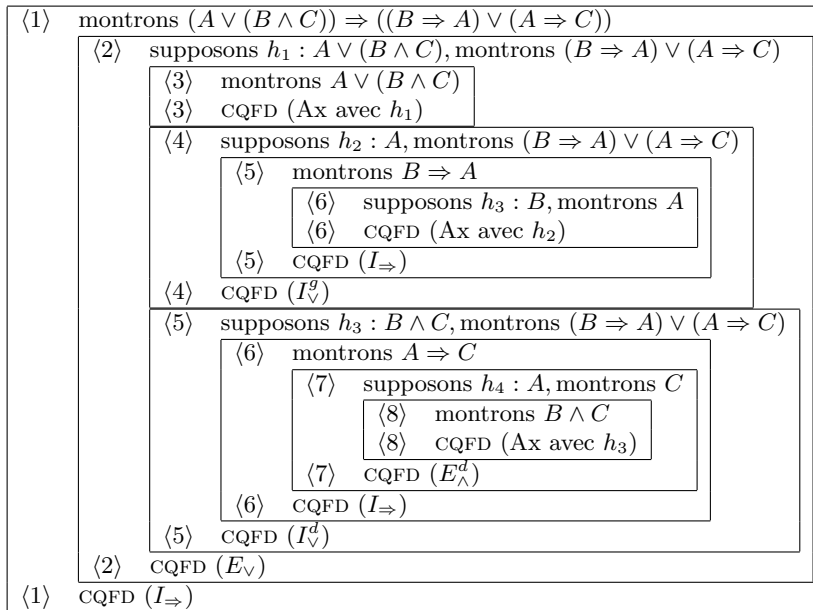
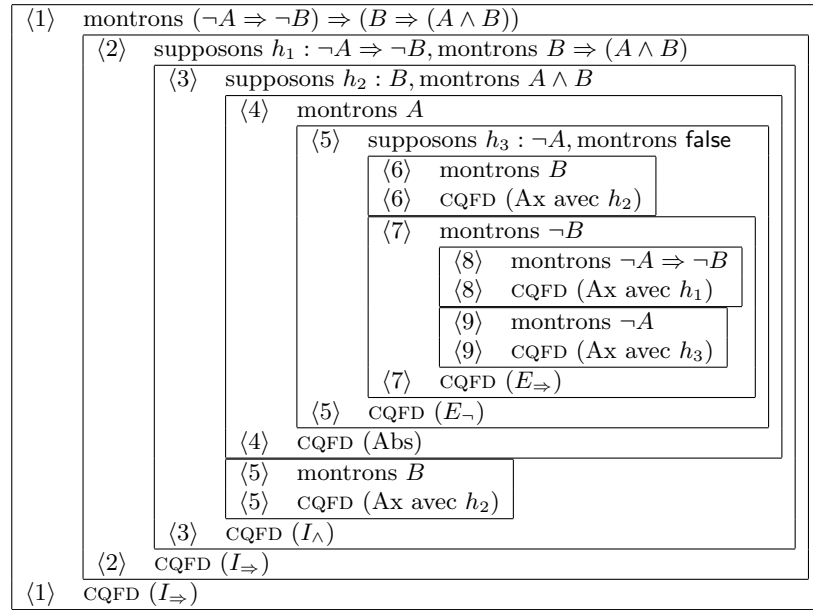
(2.b). Le symbole  $s_3$  est le premier symbole qui apparaît à droite du quantificateur  $\exists$ , c'est donc un symbole de variable de  $X$ . Le symbole  $s_6$  est le premier symbole qui apparaît à droite du quantificateur  $\forall$ , c'est donc un symbole de variable de  $X$ .

Les symboles  $s_1$  et  $s_4$  sont les symboles de prédicat de  $\mathcal{P}$  des trois formules atomiques de  $F_2$  ( $s_1 \in \mathcal{P}_2$  et  $s_4 \in \mathcal{P}_1$ ).

Le symbole  $s_5$  admet pour argument  $s_2$  pour former le terme  $s_5(s_2)$  et  $s_6$  pour former le terme  $s_5(s_6)$  : c'est donc un symbole de fonction de  $\mathcal{F}$  ( $s_5 \in \mathcal{F}_1$ ).

Il reste traiter le symbole  $s_2$ . Il ne peut pas être un symbole de prédicat puisqu'il apparaît en argument du symbole de fonction  $s_5$ . C'est un symbole sans argument qui peut donc être soit un symbole de variable de  $X$  (il s'agit alors d'une occurrence libre de ce symbole de variable), soit un symbole de constante de  $\mathcal{F}_0$ .

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2.



► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3.

(1).  $F_1 \models F_2$  si et seulement si pour toute structure  $\mathbf{M}$ , si  $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$  alors  $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$ .

(2.a).

$$\begin{aligned}
[F_1]^{\mathbf{M}} &= \overline{[\neg A \vee A]^{\mathbf{M}}} + [B \Rightarrow A]^{\mathbf{M}} = \overline{[\neg A]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}} + (\overline{[B]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}}) = \overline{[A]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}} + (\overline{[B]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}}) \\
&= \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + (\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)) \\
[F_2]^{\mathbf{M}} &= \overline{[B \Rightarrow A]^{\mathbf{M}}} + [\neg A \vee A]^{\mathbf{M}} = \overline{[B]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}} + (\overline{[\neg A]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}}) = \overline{[B]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}} + (\overline{[A]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}}) \\
&= \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + (\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A))
\end{aligned}$$

(2.b). Posons  $x = \mathbf{I}_M(A)$  et  $y = \mathbf{I}_M(B)$ .

$$[F_1]^{\mathbf{M}} = \overline{\bar{x} + x} + (\bar{y} + x) \stackrel{E4.4}{=} \bar{\bar{x}}.\bar{x} + (\bar{y} + x) \stackrel{E1.2}{=} x.\bar{x} + (\bar{y} + x) \stackrel{E1.3}{=} 0 + (\bar{y} + x) \stackrel{E3.2}{=} \bar{y} + x = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$$

$$[F_2]^{\mathbf{M}} = \overline{\overline{y} + x} + (\overline{x} + x) \stackrel{E3.1}{=} \overline{\overline{y} + x} + (x + \overline{x}) \stackrel{E1.4}{=} \overline{\overline{y} + x} + 1 \stackrel{E3.7}{=} 1$$

(2.c). La formule  $F_1$  est satisfiable. Si  $\mathbf{M}_1$  est une structure telle que  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_1}(A) = 1$ , on a  $[F_1]^{\mathbf{M}_1} = 1$ . Elle n'est pas valide. Si on considère la structure  $\mathbf{M}_2$  telle que  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(A) = 0$  et  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(B) = 1$  on a  $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$ .

La formule  $F_2$  est valide donc satisfiable car pour toute structure  $\mathbf{M}$  on a  $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$

(2.d).

$$[F_3]^{\mathbf{M}} \equiv [F_1]^{\mathbf{M}}.[F_2]^{\mathbf{M}} \equiv [F_1]^{\mathbf{M}.1} \stackrel{E2.6}{=} [F_1]^{\mathbf{M}}$$

Donc  $F_3$  est comme  $F_1$ , satisfiable mais non valide.

(2.e). On a  $\neg F_2 \models F_1$  ssi pour toute structure  $\mathbf{M}$  telle que  $[\neg F_2]^{\mathbf{M}} = 1$  on a  $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$ . Comme  $F_2$  est valide, il n'existe pas une telle structure  $\mathbf{M}$ . On a donc bien  $\neg F_2 \models F_1$ .

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4.

(1). Définition inductive de  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$  :

- $\{a, b\} \subseteq \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ .
- Si  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ , alors  $\odot(t) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ .
- Si  $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ , alors  $\otimes(t_1, t_2) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ .

(2.a).  $[\otimes(\odot(b), a)]^{\mathbf{M}_1} = \otimes^{\mathbf{M}_1}([\odot(b)]^{\mathbf{M}_1}, [a]^{\mathbf{M}_1}) = \otimes^{\mathbf{M}_1}(\odot^{\mathbf{M}_1}([b]^{\mathbf{M}_1}), 2) = \otimes^{\mathbf{M}_1}(\odot^{\mathbf{M}_1}(4), 2) = \otimes^{\mathbf{M}_1}(8, 2) = 16$

(2.b). Raisonnement par induction sur  $t$ .

(B) Si  $t = a$  alors  $[a]^{\mathbf{M}_1} = 2 = 2^1$  et si  $t = b$ , alors  $[b]^{\mathbf{M}_1} = 4 = 2^2$ .

(I) Supposons  $[t']^{\mathbf{M}_1} = 2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , et  $t = \odot(t')$ .

$$\begin{aligned} [t]^{\mathbf{M}_1} &= [\odot(t')]^{\mathbf{M}_1} \\ &= \odot^{\mathbf{M}_1}([t']^{\mathbf{M}_1}) \\ &= \odot^{\mathbf{M}_1}(2^k) \text{ par hyp. d'induction} \\ &= 2 * 2^k = 2^{k+1} \text{ avec } k+1 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Supposons  $[t_1]^{\mathbf{M}_1} = 2^{k_1}$ ,  $k_1 \in \mathbb{N}$ ,  $[t_2]^{\mathbf{M}_1} = 2^{k_2}$ ,  $k_2 \in \mathbb{N}$  et  $t = \otimes(t_1, t_2)$

$$\begin{aligned} [t]^{\mathbf{M}_1} &= [\otimes(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}_1} \\ &= \otimes^{\mathbf{M}_1}([t_1]^{\mathbf{M}_1}, [t_2]^{\mathbf{M}_1}) \\ &= \otimes^{\mathbf{M}_1}(2^{k_1}, 2^{k_2}) \text{ par hyp. d'induction} \\ &= 2^{k_1} * 2^{k_2} = 2^{k_1+k_2} \text{ avec } k_1+k_2 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(3.a) Définissons la structure  $\mathbf{M}_2$  comme étant égale à  $\mathbf{M}_1$  enrichie par l'interprétation suivante du prédicat  $p$  :  $p^{\mathbf{M}_2} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \text{ est pair}\}$

$$\begin{aligned} [F]^{\mathbf{M}_2} &= [p(\odot(a), \odot(b)) \Rightarrow (p(\otimes(a, b), a) \vee p(\otimes(a, b), b))]^{\mathbf{M}_2} \\ &= [\overline{p(\odot(a), \odot(b))}]^{\mathbf{M}_2} + [p(\otimes(a, b), a) \vee p(\otimes(a, b), b)]^{\mathbf{M}_2} \\ &= [\overline{p(\odot(a), \odot(b))}]^{\mathbf{M}_2} + ([p(\otimes(a, b), a)]^{\mathbf{M}_2} + [p(\otimes(a, b), b)]^{\mathbf{M}_2}) \\ &= \overline{p^{\mathbf{M}_2}(\odot^{\mathbf{M}_2}(a^{\mathbf{M}_2}), \odot^{\mathbf{M}_2}(b^{\mathbf{M}_2}))} + (p^{\mathbf{M}_2}(\otimes^{\mathbf{M}_2}(a^{\mathbf{M}_2}, b^{\mathbf{M}_2}), a^{\mathbf{M}_2}) + p^{\mathbf{M}_2}(\otimes^{\mathbf{M}_2}(a^{\mathbf{M}_2}, b^{\mathbf{M}_2}), b^{\mathbf{M}_2})) \\ &= \overline{p^{\mathbf{M}_2}(\odot^{\mathbf{M}_2}(2), \odot^{\mathbf{M}_2}(4))} + (p^{\mathbf{M}_2}(\otimes^{\mathbf{M}_2}(2, 4), 2) + p^{\mathbf{M}_2}(\otimes^{\mathbf{M}_2}(2, 4), 4)) \\ &= \overline{p^{\mathbf{M}_2}(4, 8)} + (p^{\mathbf{M}_2}(8, 2) + p^{\mathbf{M}_2}(8, 4)) \\ &= \overline{1} + (1 + 1) = 1 \end{aligned}$$

(3.b) Définissons la structure  $\mathbf{M}_3$  comme étant égale à  $\mathbf{M}_1$  enrichie par l'interprétation suivante du prédicat  $p$  :  $p^{\mathbf{M}_3} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y\}$ . En reprenant le calcul de la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} [F]^{\mathbf{M}_3} &= \overline{p^{\mathbf{M}_3}(4, 8)} + (p^{\mathbf{M}_3}(8, 2) + p^{\mathbf{M}_3}(8, 4)) \\ &= \overline{1} + (0 + 0) = 0 \end{aligned}$$